

Matemática

e⁰

**Cuaderno
de ejercicios**
Sexta Edición



Oscar Hugo López Rivas
Ministro de Educación

Héctor Alejandro Canto Mejía
Viceministro Técnico de Educación

María Eugenia Barrios Robles de Mejía
Viceministra Administrativa de Educación

Daniel Domingo López
Viceministro de Educación Bilingüe Intercultural

José Inocente Moreno Cámbara
Viceministro de Diseño y Verificación de la Calidad Educativa

Ana María Hernández Ayala
Directora General de Gestión de Calidad Educativa

Revisión y actualización 2019
Clara Luz Solares López de Sánchez
Luis Fernando Méndez García

Revisión y adaptación 2017
Clara Luz Solares López de Sánchez
Luis Fernando Méndez García

Cuadernillo elaborado por la Dirección General de Gestión de Calidad Educativa –Digecade–,
Ministerio de Educación, Guatemala.
6ª. Calle 1-87, zona 10, Guatemala, C.A. 01010
Julio 2019
Sexta edición

Se puede reproducir total o parcialmente siempre y cuando se cite al Ministerio de Educación —Mineduc—, como fuente de origen y que no sea con usos comerciales para transmitirlo.



Estimados docentes y estudiantes:

Reciban un caluroso saludo, en ocasión de compartirles el cuadernillo de Matemática que se ha elaborado con la intención de fortalecer sus capacidades en esta área.

El Ministerio de Educación, presenta esta herramienta de aprendizaje con la finalidad de facilitar la ejercitación en el desarrollo del pensamiento lógico matemático y el aprendizaje significativo de ustedes, los estudiantes.

Es mi deseo motivarles para que por medio de la ejercitación se visualice una mejora en el rendimiento de la misma, pues la visión de los profesores es que incursionen con entusiasmo y dedicación en el recorrido de los aprendizajes esperados.

Este cuadernillo presenta varios temas que deben ejercitarse, confío en que será potencializado en manos de docentes y estudiantes; será como semilla fértil, ustedes obtendrán del mismo los mejores resultados.

Finalmente les invito a trabajar en forma colaborativa en el aula o fuera de ella, en un ambiente agradable, ejercitándose en esta área como si fuera un deporte: con esmero, disciplina, esfuerzo y constancia.

Deferentemente,

Dr. Oscar Hugo López Rivas
Ministro de Educación

Índice

Temas	Página
1. Conjuntos	5
2. Numeración y calendario Maya	8
3. Jerarquía de operaciones	10
4. Números complejos y racionalización	12
5. Fracciones Complejas	14
6. Razón y proporción	16
7. Porcentaje e interés	18
8. Regla de tres simple y compuesta	22
9. Área	26
10. Volumen	29
11. Medidas de tendencia central	32
12. Lógica matemática	38
13. Expresiones algebraicas	42
14. Factorización	44
15. Ecuaciones de segundo grado	46
16. Triángulos	48
17. Funciones trigonométricas	54
18. Gráficas de las funciones trigonométricas	59
19. Funciones exponenciales y logarítmicas	63
20. Ley de senos y cosenos	67
21. Sistema matricial	69
22. Derivadas	71
23. Cálculo integral	73
24. Respuestas	75

Para los estudiantes ...

Elaboremos un plan.

Horario de estudio.

Ambiente agradable.

Preparémonos para la clase.

Investiguemos lo relacionado con el tema y preparemos interrogantes.

Participemos en cada clase presencial.

Asistamos con puntualidad y participemos activamente.

Tomemos apuntes de las definiciones, conceptos y reglas.

Revisemos los apuntes al llegar a casa y agreguemos ideas propias.

Aprendamos álgebra como aprendemos un deporte.

Requiramos disciplina, esfuerzo, constancia y material de trabajo.

Desarrollemos las habilidades de razonamiento y de abstracción.

Trabajemos en equipos de estudio.

Integrémonos a un grupo que fortalezca nuestras habilidades.

Aprendamos de los errores propios y ajenos.

Que nuestros errores pasen a ser parte de un plan de mejora.

Notas

[illegible]

Conjuntos

Recordemos

Conjunto. Un grupo o colección de objetos se llama conjunto, cada objeto del conjunto se llama elemento. Un conjunto se nombra con una letra mayúscula, como A, B, etc.

Representación de conjuntos. Un conjunto se puede representar por extensión, comprensión o diagramas de Venn.

Pertenencia. Pertenecer o no a un conjunto y se representar así $\in$ o $\notin$.

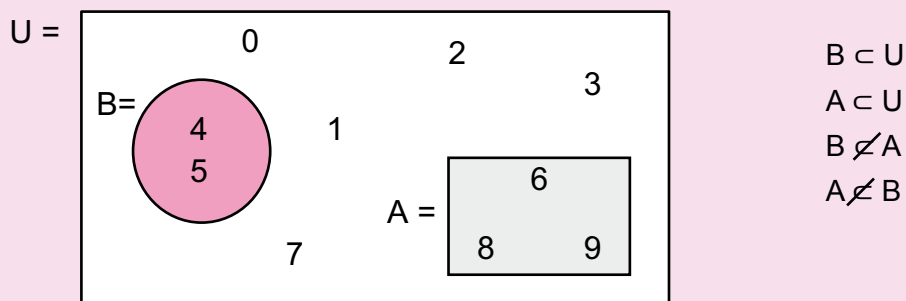
Cardinalidad de conjuntos. El conjunto en el que es posible enumerar todos los elementos que lo forman, se llama conjunto finito y en el que no se pueden representar físicamente todos los elementos se denomina infinito.

El conjunto que tiene solo un elemento, se llama conjunto unitario. El conjunto que no tiene elementos, se llama conjunto vacío y se representa Φ ó $\{ \}$.

Subconjuntos

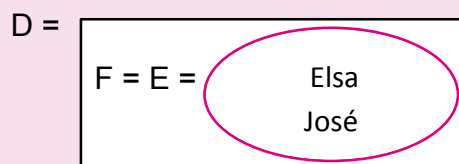
El conjunto B, está contenido o es subconjunto de A, si y solo si, todo elemento de B es también elemento de A. Esta relación se llama relación de contención. Simbólicamente se escribe: $B \subset A$ y se lee; el conjunto B está contenido en A, si no está contenido, se utiliza este símbolo $\not\subset$ y se nombra así $A \not\subset B$.

Observemos el ejemplo:



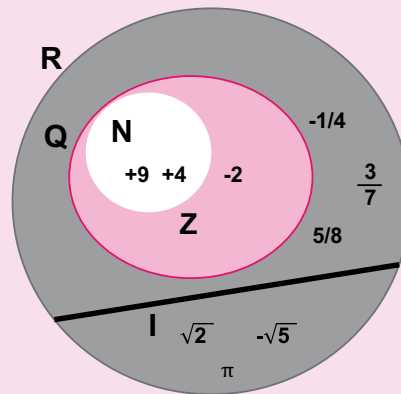
Para este ejemplo B y A son conjuntos que tienen diferentes elementos y por lo tanto se denominan conjuntos ajenos o disjuntos.

Dos conjuntos son iguales, si tienen exactamente los mismos elementos. Esta relación se llama igualdad de conjuntos. Simbólicamente se escribe $F = E$, $E = D$, $D \subset E$ y $E \subset D$. Gráficamente se representa así:

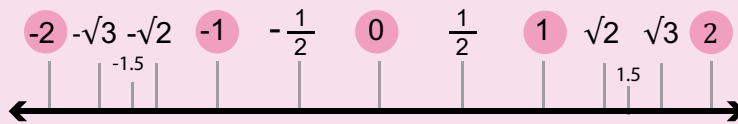


Recordemos

Los Conjuntos numéricos en los números Reales.



Recta Real Es posible ordenar los números Reales, entre dos Reales existen infinitos números Reales. En la recta Real a cada punto de la recta le corresponde un número Real y a cada número real le corresponde un punto en la recta, con lo que se establece una correspondencia biunívoca.



Razón Hay situaciones diarias que las podemos expresar en forma matemática, por ejemplo:

- En un salón de clases por cada 5 mujeres hay 6 hombres, es decir $\frac{5}{6}$.
- En una receta de cocina por cada 4 libras de harina se utilizarán 2 libras de mantequilla, es decir $\frac{4}{2}$.

Observemos el procedimiento en el siguiente ejemplo:

En una práctica de penaltis un jugador tuvo 12 oportunidades y tuvo éxito en 8 de ellos. ¿Cuál es el valor de razón de éxito en relación con las oportunidades? Responda las preguntas:

- ¿Cuál es la cantidad base? 12 oportunidades
- ¿Cuál es la cantidad que se compara? 8
- ¿Cómo se puede calcular el valor de razón de éxito en relación con las oportunidades?

Practiquemos

1) Dados los siguientes conjuntos:

$$T = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ par}, x < 12\}$$

$$Z = \{x/x \in \mathbb{N}, 5 < x \leq 12\}$$

$$M = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ impar}, 10 < x < 20\}$$

Representémoslos por extensión y en forma gráfica según las siguientes operaciones entre conjuntos:

a) $T \cup M$

b) $Z \cap T$

c) $(M \cup Z) - T$

d) $(M \cup Z \cup T)$

e) T^c

f) $T \Delta Z$

2) Escribamos por extensión los siguientes conjuntos:

a) Conjunto de animales que son aves y además son acuáticos.

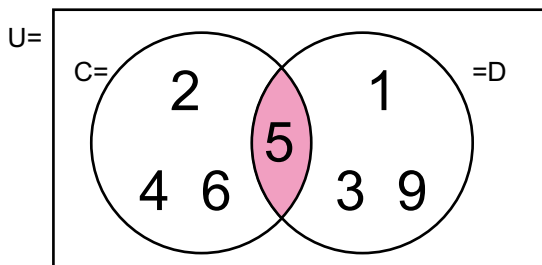
b) Conjunto de animales que son mamíferos acuáticos.

3) Investiguemos el producto cartesiano de dos o más conjuntos y luego elaboremos los siguientes ejercicios. Si $A = \{2,4,6\}$ y $C = \{2,4,6\}$

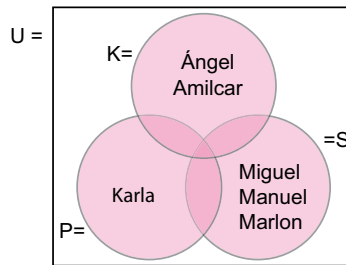
a) $A \times C =$

b) $C \times A =$

4) Escribamos la operación representada en cada diagrama:



a) $C \cap D$



b) $K \cup P \cup S$

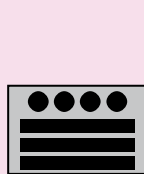
5) Resolvamos los siguientes problemas utilizando una estrategia gráfica de Diagramas de Venn.

- En el aula de cuarto grado hay 43 estudiantes. 23 estudiantes solo juegan fútbol, 12 juegan basquetbol y 8 practican los dos deportes.
- De un grupo de 80 personas: 24 estudian, 30 trabajan y 26 ni trabajan ni estudian. ¿En total cuántas personas estudian y trabajan?
- Dibujemos ejemplos para representar los siguientes diagramas: Diferencia simétrica, intersección y operación complemento.

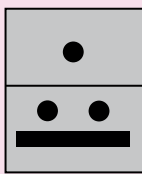
Numeración maya y calendario maya

Recordemos

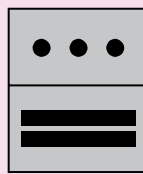
Repasemos los números mayas



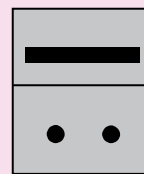
19



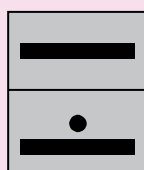
27



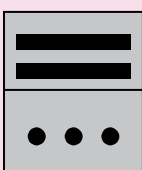
70



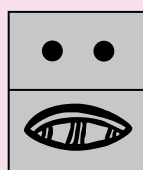
102



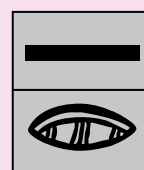
106



203



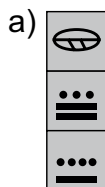
40

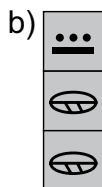


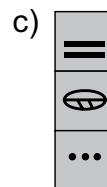
100

Practicemos

1) Escribamos los siguientes números mayas como números decimales.







2) Escribamos 149,000 en número maya.

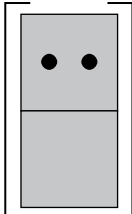
3) Realicemos las siguientes sumas

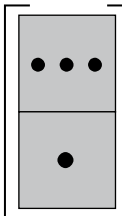
a) +

b) +

c) +

- 4) Investiguemos como se multiplican los números mayas y elaboremos las siguientes operaciones:

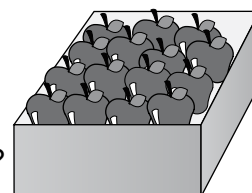
a) $\bullet \bullet \times$ 

b) $\bullet \bullet \times$ 

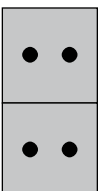
- 5) Resolvamos los problemas.

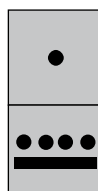
a) En una escuela hay  niños. Para una actividad deciden organizarlos en grupos de . ¿Cuántos niños habrá en cada grupo?

b) Jeremías tiene  cajas de manzanas. En cada caja hay  manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene en total?



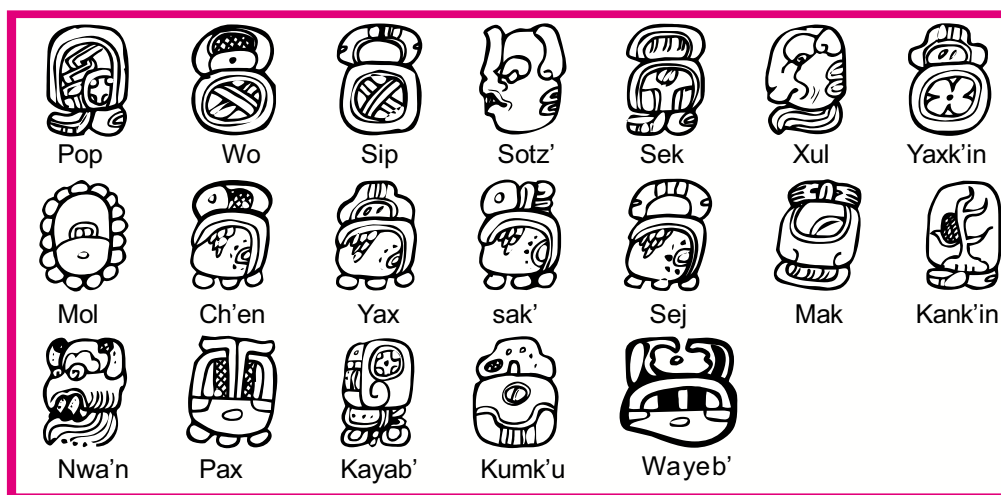
- 6) Realicemos las divisiones, investiguemos el procedimiento.

a)  $\div$ 

b)  $\div$ 

- 7) Investiguemos sobre el calendario maya.

Los meses o 19 grupos o divisiones del Ab' son los siguientes:



El calendario Ab', solar o de la cuenta larga está formado por 365 días que se agrupan en 18 meses de 20 días, más un mes de 5 días.

Jerarquía de operaciones

Recordemos

• Dos fracciones son equivalentes si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ si } ad = bc, \text{ por ejemplo } \frac{2}{3} = \frac{6}{9}, \text{ si } 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

• Si el numerador o denominador de una fracción es negativo, la fracción es negativa:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \text{ ejemplo } \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

Las operaciones combinadas deben realizarse en el orden que se presenta a continuación:

$$[15 - (23 - 10 \div 2)] * [5 + (3 * 2 - 4)] - 3 + (8 - 2 * 3) =$$

1. Operamos con las potencias, productos y cocientes de los paréntesis.

$$= [15 - (18)] * [5 + (6 - 4)] - 3 + (8 - 6) =$$

2. Realizamos las sumas y restas que están dentro de los paréntesis.

$$= [-3] * [5 + 2] - 3 + 2 =$$

3. Operamos en los corchetes.

$$= -3 * 7 - 3 + 2$$

4. Multiplicamos.

$$= -21 - 3 + 2 =$$

5. Restamos y sumamos.

$$= -22$$

Orden de operaciones en que hay signos de agrupación.

- Realicemos operaciones que estén dentro de símbolos de agrupamiento, como paréntesis, llaves o corchetes.
- Calculemos potencias y raíces que estén fuera de los paréntesis.
- Multipliquemos y dividamos de izquierda a derecha.
- Efectuemos sumas y restas de izquierda a derecha.

Practiquemos

1) $2 \{25 - [(130 - 22 * 5) - 16]\} =$

$$2\{25 - [(130 - \boxed{}) - 16]\} =$$
 Primero realicemos la multiplicación indicada dentro del paréntesis ().

$$2\{25 - [\boxed{} - 16]\} =$$
 Luego elaboremos la operación incluida en el paréntesis ().

$$2\{25 - [4]\} =$$
 Realicemos la operación indicada en los corchetes [] y en las llaves { }.

$$2 * 21 = \boxed{}$$
 Finalmente multipliquemos.

2) $3 - 4^2 \cdot 2 + 15 \div 3 \cdot \sqrt[3]{64} - 1 =$

$$3 - 16 \cdot 2 + 15/3 \cdot 4 - 1 =$$

Primero calculemos potencias y raíces.

$$3 - 32 + 20 - 1 =$$

Luego realicemos multiplicaciones y divisiones.

$$= - 10$$

Finalmente efectuemos las sumas y las restas.

3) Resolvamos cada inciso:

a) $5 [(10 - 4) 2 + (30 - 20) 3] =$ _____

b) $[(6 + 3) 2 + (6 - 1) 5] [(3 + 6) 3 - (5 - 2) 2] =$ _____

c) $200 + 20 - 3 \cdot 5 + 5 [15 - (6 - 4) 3 + (5 - 2) 4] =$ _____

d) $8 + 9 \div 3 - 12 \div 3 + 4 =$ _____

e) $6 + 20 \div 4 - 3 \cdot 3 + 4 =$ _____

f) $80 \div [(18 - 6) \div 3 + (24 - 4) \div 5] =$ _____

g) $[12 + (5 - 3) 2] \div [(10 - 2) \div 2 + 4] =$ _____

h) $[(14 - 4) \div 5 + (10 - 2) \div 4] + 9 \cdot 4 \div 12 + 2 =$ _____

i.) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{6} =$ _____

j) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{5} =$ _____

k) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \div \frac{1}{4} =$ _____

4) Resolvamos los problemas utilizando los signos de agrupación para escribir el planteamiento matemático de cada uno de los enunciados siguientes:

a) En una tienda Laura compró 5 libras de frijol que costaron Q 4.25 cada una. También compró 6 libras de arroz que costaron Q 3.75. Si pagó con un billete de Q100.00, ¿cuánto le dieron de vuelto?

b) El profesor Carlos compró 6 paquetes de 12 galletas y 8 paquetes de 6 galletas cada uno. El total de galletas se repartió entre 24 estudiantes, ¿cuántas galletas le corresponden a cada estudiante?

Números complejos y racionalización

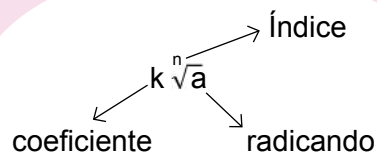
Recordemos

Raíz de un producto.

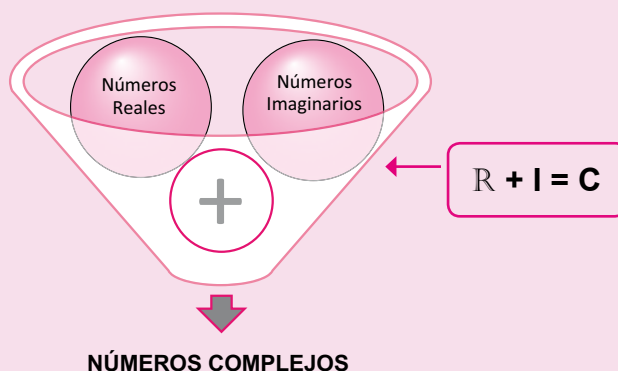
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} * \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} * \frac{c}{d}}$$

Raíz de un cociente.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$



El campo de los números.



Planteo de una ecuación	Soluciones para cada una
$x^2 = 9$	3, -3 Números enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, \sqrt{-5}$ Números irracionales
$x^2 = -9$	3i Números complejos $\sqrt{-r} = \sqrt{r} i$

Practiquemos

- 1) Utilicemos las propiedades de la potenciación y de la radicación para encontrar el resultado de las siguientes expresiones:

a) $8 + 8 - \sqrt{16} - \sqrt{16} =$

b) $-0.75 + \{ (\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}) - 0.2 \} + \frac{2}{3} * (\frac{1}{4})^2 =$

2) Escribamos los números en la forma $a + bi$, en los casos donde sea necesario:

$$\text{a) } \sqrt{-25} \quad \text{b) } \sqrt{-\frac{25}{16}} \quad \text{c) } \sqrt{-24} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-9}} \quad \text{e) } \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{3}}$$

3) Resolvamos:

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{729}{125}} = \quad \text{d) } \sqrt[4]{\frac{10,000}{2,401}} = \quad \text{e) } \left[\frac{(\sqrt{16})^3}{\sqrt{5}} * \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} \right)^2 \right] =$$

4) Investiguemos los números conjugados y efectuemos las operaciones siguientes:

$$\text{a) } \frac{1}{3+2i} \quad \text{b) } \frac{7i}{3+5i} \quad \text{c) } \frac{5-i}{7+2i} = \quad \text{d) } \frac{3}{-3-i} \quad \text{e) } \frac{5-\sqrt{-289}}{1+\sqrt{-16}}$$

5) Sumemos y multipliquemos las raíces cuadradas de números complejos.

$$\text{a) } \sqrt{-81} + \sqrt{-36} \quad \text{b) } \sqrt{-16} \sqrt{-4} \quad \text{c) } \sqrt{-3} (\sqrt{-45} - \sqrt{-16})$$

6) Resolvamos los problemas utilizando los conceptos vistos en este tema.

- a) Determinemos el período de un péndulo si el tiempo t está dado en segundos, la longitud ℓ , en metros, para completar un ciclo completo. Si $\ell = 8$ m ¿Cuánto vale t ?

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- b) Desde un puente una persona suelta una jarra y observa que golpea el agua después de 5 segundos. Utilicemos la siguiente fórmula para que determinemos la altura del puente. ($d = h$).

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

Fracciones complejas

Recordemos

Algoritmos de las operaciones con los números racionales

$$\bullet \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{7} + \frac{9}{7} = \frac{2+9}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{3} + \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{31}{15}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

Para trabajar con números reales tomar en cuenta:

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } 2\frac{1}{2} * \frac{1}{5} * 2 = 1$$

$$\text{b) } \frac{2}{6}(6) + \frac{4}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{d) } 36 * \frac{1}{84} * \frac{14}{9} * \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

Practiquemos

$$\text{1) } 32 * (14\frac{1}{16} * 4\frac{1}{6}) =$$

$$\text{4) } 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}} =$$

$$\text{2) } (6\frac{2}{9} + 5\frac{1}{6} - 8\frac{5}{18})27 =$$

$$\text{5) } (\frac{10}{\frac{1}{4}} + 4 - \frac{1}{\frac{1}{4}}) \div (7 \div [\frac{5}{3} * \frac{6}{5}]) =$$

$$\text{3) } (\frac{4}{24} - \frac{1}{16}) * (\frac{7}{8} + \frac{1}{40} - \frac{1}{4}) =$$

Simplifiquemos utilizando la factorización.

6) $\frac{1}{m-n} + \frac{2}{m+n} + \frac{2m}{m^2 - mn + n^2} =$

7) $\frac{16 - 81x^2}{72x^2 + 5x - 12} =$

8) $\frac{\frac{a}{x-a} - \frac{a}{a+1}}{\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1}} =$

9) Descompongamos las expresiones siguientes en la suma o resta de tres fracciones irreducibles:

a) $\frac{x-y-m}{xym} =$

b) $\frac{4x^2 - 5XY + Y^2}{3X} =$

10) Solución de problemas

a) ¿Cuál es la diferencia entre $\frac{15}{18}$ y $\frac{6}{27}$?

b) Los $\frac{8}{22}$ de un número exceden en 107 a los $\frac{4}{26}$.
¿Cuál es el número?

Razón y Proporción

Recordemos

Razón. Razón de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades. Las razones pueden ser: razón aritmética y razón geométrica. La razón aritmética de dos cantidades es la diferencia indicada de dichas cantidades. Ejemplo: $7 - 4$, se lee siete es a cuatro.

La razón geométrica de dos cantidades es el cociente indicado de dichas cantidades. Ejemplo: $\frac{10}{5}$, se lee diez es a cinco.

Proporciones. Proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.

Una proporción geométrica se escribe de dos maneras

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o } a : b :: c : d$$

Los términos a y d se llaman extremos y los términos b y c se llaman medios.

Propiedad fundamental de las proporciones geométricas: en toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios, de donde se deriva:

- a) En toda proporción geométrica, un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo.
- b) En toda proporción geométrica un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio.

Practiquemos

1)

Realicemos mentalmente las operaciones.

a) $100 \times 3 = 300$

b) $100 \times 2.5 = 250$

c) $0.253 \times 1000 = 253$

d) $24 \div 10 = 2.4$

e) $5.2 \div 100 = 0.052$

f) $315 \div 1000 = 0.315$

2) Realicemos operaciones con fracciones y decimales

a) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$

b) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{9} =$

c) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} =$

d) $\frac{6}{7} \div \frac{3}{5} =$

e) $\frac{8}{5} \div \frac{9}{6} =$

3) Escribamos algunos pares de números cuya razón geométrica sea:

a) 3

b) 5

c) $\frac{1}{2}$

d) 0.25

4) Encontremos el término desconocido en las siguientes proporciones.

a) $2 : 5 :: 4 : x$

f) $\frac{18}{54} = \frac{60}{x}$

b) $8 : x :: 24 : 36$

g) $\frac{3}{2} : x :: \frac{3}{2} : \frac{5}{4}$

c) $0.25 : x :: 2.5 : 5$

h) $x : \frac{1}{7} :: 3 : 5$

d) $25.3 : 6.25 :: x : 4$

i) $5 : \frac{1}{2} :: x : 0.04$

e) $\frac{5}{6} = \frac{x}{4}$

5) Escribamos en forma de razón geométrica las situaciones siguientes.

a) En una sección de 5º bachillerato hay 15 varones y 18 señoritas (varones en relación a señoritas)

b) 250 hectáreas de bosque de pino y 300 hectáreas de bosque de ciprés (bosque de ciprés en relación a bosque de pino).

c) En un pueblo se producen 550 quintales de basura, de ellos 200 quintales son reciclables (basura reciclable en relación al total de basura).

Porcentaje e interés

Recordemos

Porcentaje. Matemáticamente se define la razón: como el cociente de dos números. En general, de dos cantidades comparables entre sí. El valor de razón 0.5, representa la mitad de la cantidad base. Esto también se puede expresar como 50% y se lee cincuenta por ciento, esta expresión se llama porcentaje. El porcentaje se obtiene cuando se considera la cantidad base como 100. De manera que al multiplicar el valor de la razón expresada con números decimales por 100 se obtiene el porcentaje, como se muestra:



Interés (I). Interés de un capital es el capital al que se van acumulando sus réditos para que produzcan otros. Las leyes financieras permiten calcular el valor de un capital actual a través de la suma de los intereses a períodos de tiempo establecidos. De manera que:

- **Capital (c):** monto de dinero prestado o invertido.
- **Tasa de interés (i):** es el valor que se paga por un monto de Q 100, se expresa en forma de porcentaje y requiere que se especifique el período de tiempo.
- **Tiempo (t):** duración de la inversión o préstamo.

El interés (I) se calcula con la siguiente fórmula:
$$\frac{100}{c} = \frac{i}{I}$$

Practicemos

1) Encontramos el porcentaje indicado en cada caso.

- a) 18% de 80 b) 25% de 180 c) 42% de 3000
- d) $\frac{1}{2}$ % de 24 e) $\frac{3}{5}$ % de 360

2) Encontramos el número cuyo porcentaje está dado en cada situación.

- a) 35 es el 25% de? e) 5 es el 1% de?
- b) 60 es el 50% de? f) 7 es el 40% de?
- c) 55 es el $\frac{5}{7}$ % de? g) 19 es el 20% de?
- d) 82 es el 36% de? h) 3 es el 5% de?

3) Respondamos las siguientes interrogantes porcentuales.

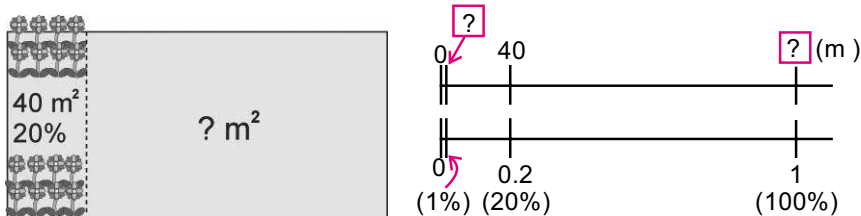
- a) 208 es el 8% más de _____?
- b) 100 es el 12% más de _____?
- c) 40 es el 20% más de _____?
- d) 25 es el 50% más de _____?
- e) 32 es el 6% más de _____?
- f) 547 es el 0.5% más de _____?

4) Resolvamos.

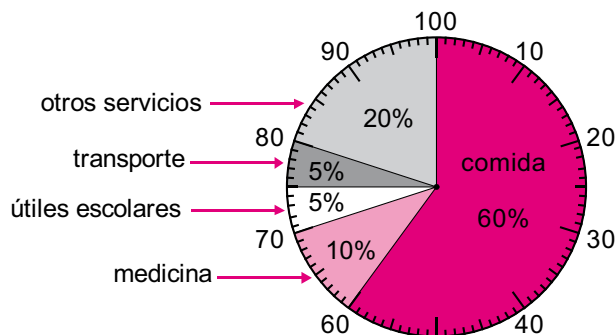
- a) ¿Cuál es el número, si 25 es el 50% menos de ese número?
- b) ¿Cuál es el número, si 128 es el 4% menos de ese número?
- c) ¿Cuál es el número, si 56 es el 20% menos de ese número?
- d) ¿Cuál es el número, si 500 es el 0.8% menos de ese número?
- e) ¿Cuál es el número, si 15 es el 30% menos de ese número?
- f) ¿Cuál es el número, si 80 es el 25% menos de ese número?

5) Resolvamos problemas de porcentaje.

- a) Una camioneta tiene capacidad máxima autorizada para 50 personas. En un viaje van 80 personas. ¿Cuál es el porcentaje de pasajeros que lleva la camioneta en relación con la capacidad autorizada?
- b) En un terreno hay flores sembradas en 40 m². Esto corresponde al 20% del área total del terreno. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el terreno?

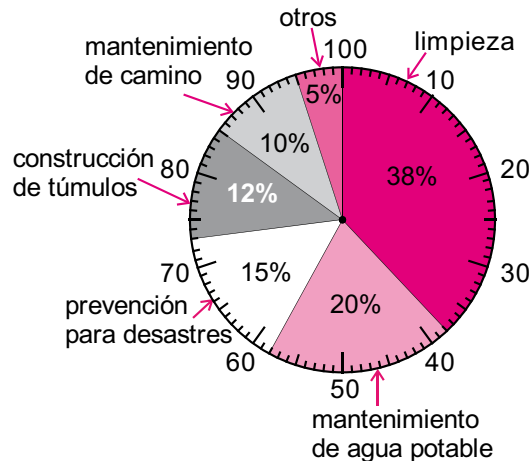


- c) Una madre de familia utiliza Q 3,000.00 para cubrir los gastos de su casa. La forma como distribuye su gasto está representada en la siguiente gráfica:



Resolvamos:

- c.1) ¿Cuál es el porcentaje en comida, en relación con el total de gasto?
 - c.2) ¿Cuál es el porcentaje de gasto de medicina, útiles escolares y transporte en relación con el total del gasto?
 - c.3) ¿Cuántos quetzales se gastan en cada uno de los rubros de: comida, transporte, medicina, útiles escolares y otros servicios?
- d) Una organización de la comunidad tiene un fondo de Q 35,000.00. La forma como se distribuye para invertirlo se muestra en la siguiente gráfica:



Respondamos:

- d.1) ¿Cuál es el porcentaje de cada rubro: limpieza, mantenimiento de agua potable, prevención para desastres, construcción de túmulos y mantenimiento de camino en relación con el total?
 - d.2) ¿Cuántos quetzales se gastan en cada inversión?
 - d.3) ¿En qué se gasta más?
 - d.4) ¿En qué se gasta menos, aparte del rubro otros?
- e) El precio original de una refrigeradora es de Q 4,399.00. Si el vendedor ofrece un descuento de Q 399.00 al comprarla al contado, ¿Qué porcentaje del precio equivale el descuento?
- f) Un extractor de olores para cocina cuesta Q 899.00, si hacen una rebaja del 0.5% ¿Qué precio se pagará?

6) Calculemos el interés en los siguientes casos:

- a) Un préstamo de Q 4,500.00 a 5 años a una tasa de interés del 8% anual.
- b) Un préstamo de Q 9,000.00 a 3 años y 8 meses a una tasa de interés del 12% anual.

7) ¿Cuál fue la cantidad de dinero en quetzales que prestó Pablo si pagó Q 18,000.00 de interés por un préstamo a una tasa de 12% de interés anual durante 6 meses?

8) Bessy dispone de Q 48,000.00 para invertir en un fondo que paga el 14% de interés anual simple. ¿Cuánto tiempo debe dejar su dinero en el fondo para recibir Q 48,000.00?

9) ¿A qué tasa de interés simple mensual se deben prestar Q 800,000.00 para que en un año produzcan Q1,600,000.00?

10) José solicita un préstamo de Q 300,000.00 al 4% de interés mensual. ¿Qué cantidad de dinero habrá pagado en intereses durante 2 años? Tomar en cuenta que:

I	c	T (meses)
4	100	1
i	300,000.00	24

Regla de tres simple y compuesta

Recordemos

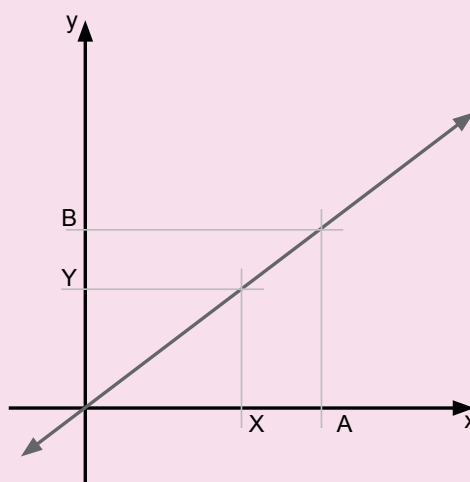
Razón

La razón se entiende como la relación entre dos términos consecutivos de la sucesión, denominados antecedente y consecuente, siendo esta relación la diferencia en el caso de las progresiones aritméticas y el cociente en el caso de las progresiones geométricas.

Proporción

La relación de proporcionalidad puede ser directa o inversa, es directa cuando a un mayor valor de A se le coloque un mayor valor de B; y es inversa, cuando a un mayor valor de A corresponde un menor valor de B.

Regla de tres simple directa



La regla de tres simple directa se fundamenta en una relación de proporcionalidad, por lo que rápidamente se observa que:

$$\frac{B}{A} = \frac{Y}{X} = k$$

Ejemplo:

Si necesito 8 litros de pintura para pintar 2 habitaciones.

¿cuántos litros necesito para pintar 5 habitaciones?

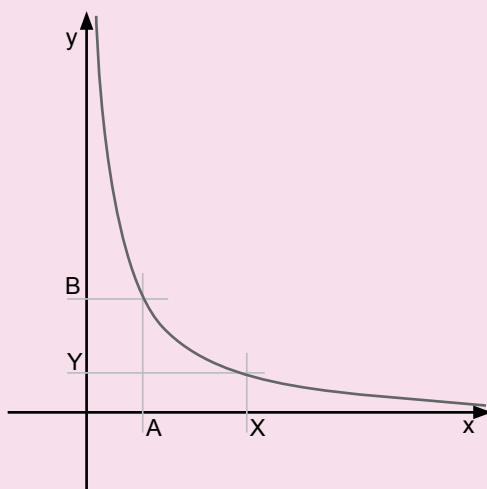
Este problema se interpreta de la siguiente manera: la relación es directa, dado que, a mayor número de habitaciones hará falta más pintura, y lo representamos así:

Planteo

Habitaciones		litros de pintura
4	_____	16
5	_____	Y

$$\text{Respuesta: } Y = \frac{16 * 5}{4} = 20 \text{ litros de pintura}$$

Regla de tres simple inversa



En la regla de tres simple inversa, en la relación entre los valores se cumple que:

$$A * B = X * Y = e$$

Ejemplo:

Si 8 trabajadores construyen un muro en 15 horas, ¿cuánto tardarán 5 trabajadores en levantar el mismo muro?

Si se observa con atención el sentido del enunciado, resulta evidente que cuantos más obreros trabajen, menos horas necesitarán para levantar el mismo muro (suponiendo que todos trabajen al mismo ritmo)

El total de horas de trabajo necesarias para levantar el muro son 120 horas, que pueden ser aportadas por un solo trabajador que emplee 120 horas, 2 trabajadores en 60 horas, 3 trabajadores lo harán en 40 horas, etc. En todos los casos el número total de horas permanece constante.

Planteo

Trabajadores	horas
8 _____	15
5 _____	Y

$$Y = \frac{8 * 15}{5} = 24 \text{ horas}$$

Respuesta: 5 trabajadores tardarán 24 horas.

Regla de tres compuesta

Plantear problemas que involucren más de tres cantidades conocidas, además de la desconocida.

Ejemplo:

Si 12 trabajadores construyen un muro de 100 metros en 15 horas, ¿cuántos trabajadores se necesitarán para levantar un muro de 75 metros en 26 horas?

En el anterior problema aparecen dos relaciones de proporcionalidad, se ha incluido una relación inversa y otra directa.

En efecto, si un muro de 100 metros lo construyen 12 trabajadores, es evidente que para construir un muro de 75 metros se necesitarán menos trabajadores.

Cuanto más pequeño es el muro, menos número de obreros precisamos: se trata de una relación de proporcionalidad directa.

Por otro lado, si disponemos de 15 horas para que trabajen 12 obreros, es evidente que disponiendo de 26 horas necesitaremos menos obreros. Al aumentar una cantidad, disminuye la otra: se trata de una relación de proporcionalidad inversa.

El problema se enunciaría así:

Metros	horas	trabajadores
100 _____	15 _____	12
75 _____	26 _____	Y

Solución:

$$Y = \frac{12 \cdot 75 \cdot 15}{100 \cdot 26}$$

$$Y = \frac{13,500}{2,600} = 5.19$$

Respuesta: Levantarán un muro de 7m en 26 hrs, 5 trabajadores.

Practiquemos

- 1) Investiguemos una situación problema que nos represente magnitudes de proporcionalidad directa, comprobemos que si tenemos dos magnitudes directamente proporcionales, entonces

$$\frac{y}{x} = k, \text{ k es constante de proporcionalidad}$$

y la relación es $y = kx$. Demos valores a x como 0, 1, 2, y representemos la relación en una gráfica.

- 2) Como la escala de un mapa está determinada por $\frac{\text{distancia representada}}{\text{distancia real}}$,

grafiquemos y determinemos si son proporcionales las horas dedicadas al estudio y las notas que obtenemos.

3) Completemos los espacios si las aseveraciones son proporcionales y si no son expliquemos por qué.

- a) Depósitos de una cuenta bancaria y el dinero que queda en el banco en esa cuenta.

Sí _____ No _____

- b) En una celebración de cumpleaños cantidad de niños y cantidad de dulces que se reparten.

Sí _____ No _____

- c) Kilómetros recorridos y gasolina gastada.

Sí _____ No _____

- d) Cantidad de obreros y horas trabajadas.

Sí _____ No _____

4) Resolvamos los siguientes problemas utilizando la teoría de regla de tres simple directa e inversa y de regla de tres compuesta. Consultemos bibliografía para ampliar el tema y comprender la resolución de los mismos.

- a) 3 máquinas de una fábrica, producen los artículos de un pedido en 3.5 horas. ¿En cuánto tiempo se producen los artículos si hubiera 6 máquinas trabajando?

- b) 4 hombres han trabajado 10 horas diarias y han hecho 100 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 8 hombres, si trabajaran 5 horas diarias, y tienen que hacer 80 metros de la misma obra?

- c) Si 4 libros cuestan Q454.00 ¿Cuánto costarán 20 libros?

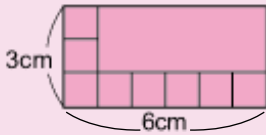
- d) Unos albañiles han hecho una obra en 10 días, han trabajado 8 horas diarias. ¿Cuántos días hubieran tardado para entregar la obra si hubieran trabajado 10 horas diarias?

- e) Se emplean 20 hombres durante 8 días, trabajando 6 horas diarias, para cavar una zanja de 30 m de largo, 12 m de ancho y 8 m de profundidad. ¿Cuántos días necesitarán 10 hombres, trabajando 4 horas diarias, para cavar otra zanja de 20 m de largo, 6 m de ancho y 12 m de profundidad, en un terreno escabroso?

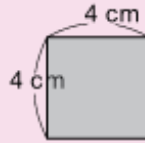
Área

Recordemos

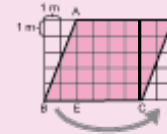
Cálculo de área de figuras geométricas.



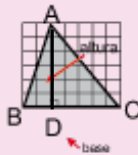
$$\begin{aligned}\text{Área del rectángulo} &= \text{largo} \times \text{ancho} \\ &= 6 \times 3 = 18 \\ &= 18 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Área del cuadrado} &= \text{largo} \times \text{lado} \\ &= 4 \times 4 = 16 \\ &= 16 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



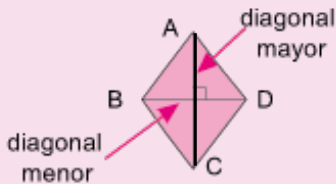
$$\begin{aligned}\text{Área del romboide} &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= 6 \times 5 = 30 \\ &= 30 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



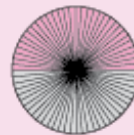
$$\text{Área del triángulo} = \text{base} \times \text{altura} \div 2$$



$$\begin{aligned}\text{Área del trapecio} &= \\ &= (\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura} \div 2\end{aligned}$$



$$\text{Área del rombo} = \text{diagonal mayor} \times \text{diagonal} \div 2$$

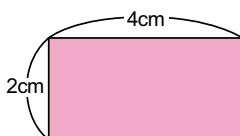


$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= (\text{circunferencia} \div 2) \times \text{radio} \\ &= \pi \times \text{diámetro} \div 2 \times \text{radio} \\ &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

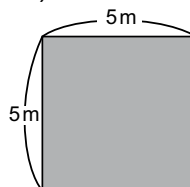
Practiquemos

1) Calculemos el área de las figuras geométricas.

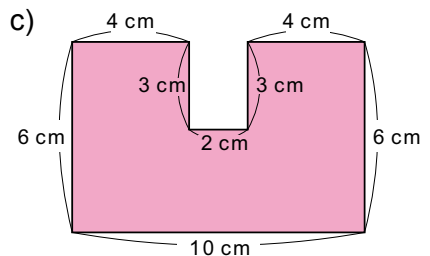
a)

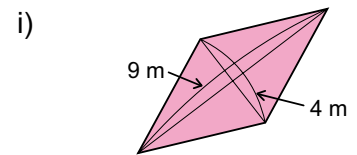
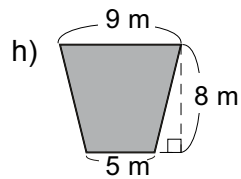
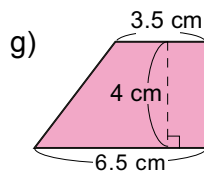
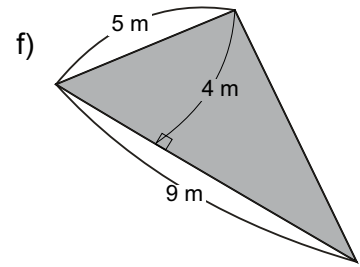
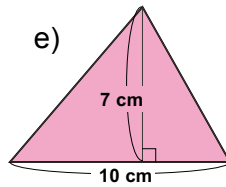
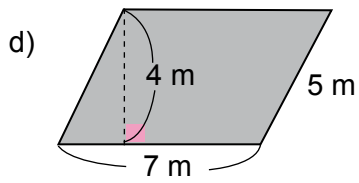


b)

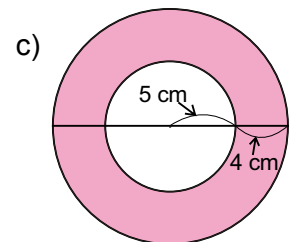
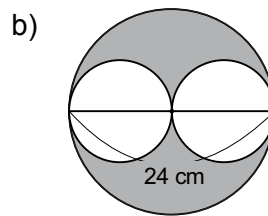
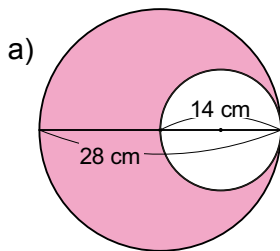


c)

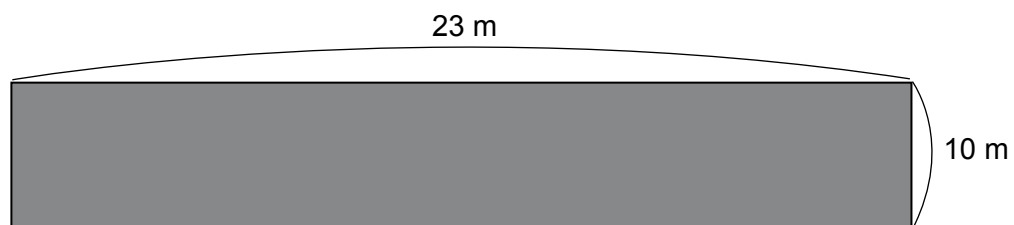




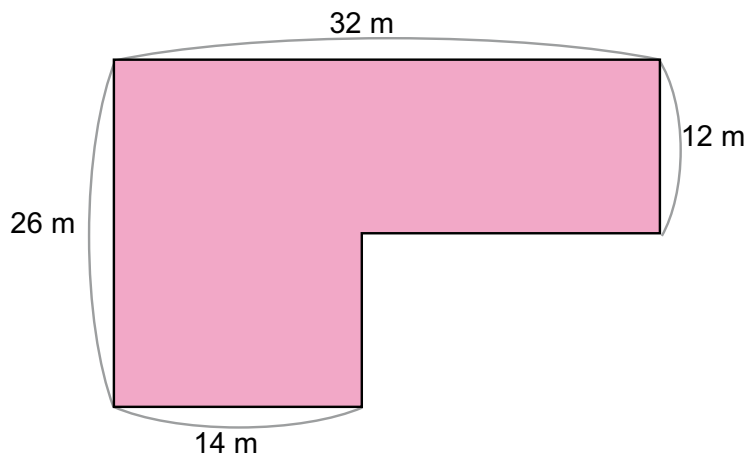
2) Calculemos el área de la parte pintada.



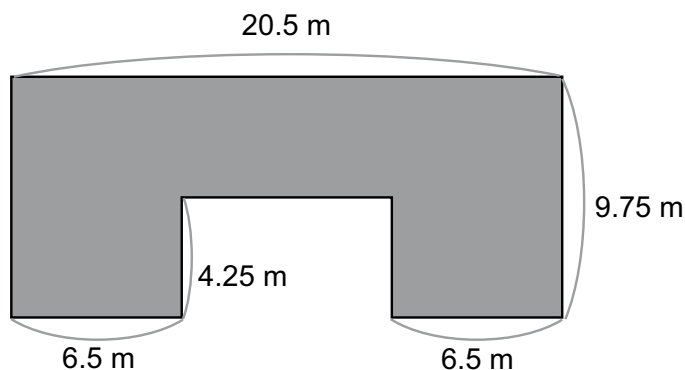
3) Calculemos el área de un terreno que tiene 23 metros de largo y 10 metro de ancho.



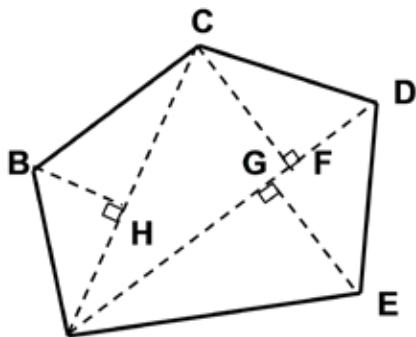
4) Calculemos el área de un terreno que tiene las siguientes medidas:



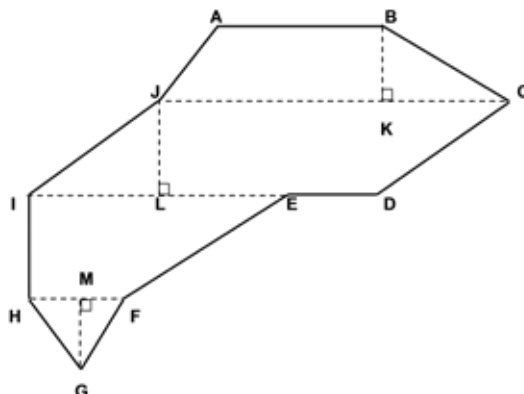
5) Don Carlos va a cambiar el piso cerámico en su casa. La forma y medidas de la casa se presentan a continuación. Si un metro cuadrado de piso cerámico tiene un valor de Q 63.25, ¿calculemos cuánto gastará Don Carlos en el cambio de piso de su casa?



6) Un terreno tiene las medidas como las que se presentan en el dibujo siguiente. Calculemos el área total del terreno, sabiendo que: $\overline{AC} = 35$ m, $\overline{BH} = 15$ m, $\overline{AD} = 42$ m, $\overline{CF} = 17.5$ m y $\overline{GE} = 12.5$ m



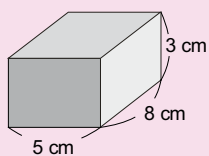
- 7) Un terreno tiene las medidas como las que se presentan en el dibujo siguiente. Calculemos el área total del terreno, sabiendo que: $\overline{AB} = 45$ m, $\overline{JC} = 73$ m, $\overline{BK} = 15$ m, $\overline{JL} = 20$ m, $\overline{IE} = 54$ m, $\overline{ED} = 19$, $\overline{IH} = 23$, $\overline{HF} = 20$, $\overline{MG} = 15$. Si el metro cuadrado de ese terreno tiene un precio de Q 92.00, ¿cuánto es el precio total?



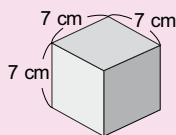
Volumen

Recordemos

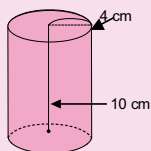
Cálculo del volumen de cuerpos geométricos.



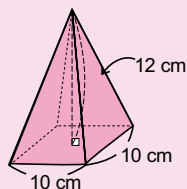
Volumen del prisma = largo * ancho * altura



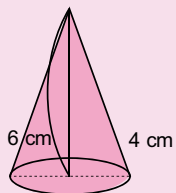
Volumen del cubo = lado * lado * lado = l³



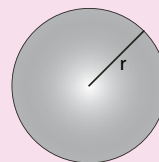
Volumen del cilindro = área de la base * altura



Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$ * área de la base * altura



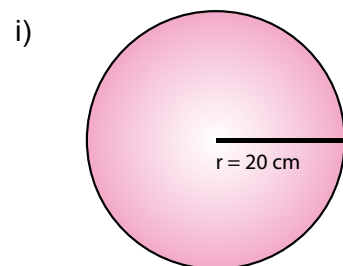
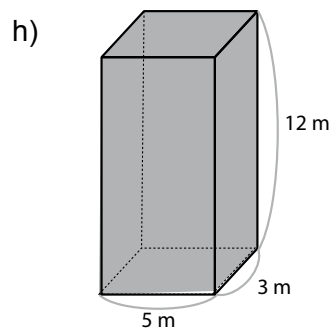
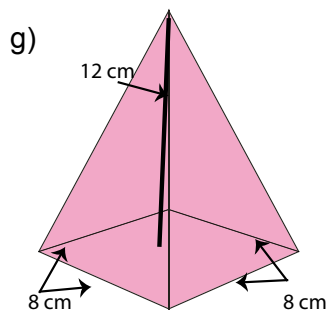
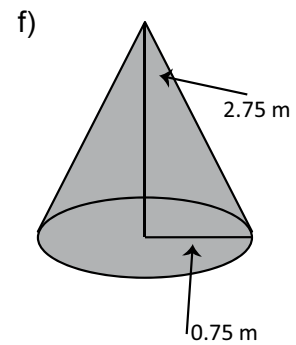
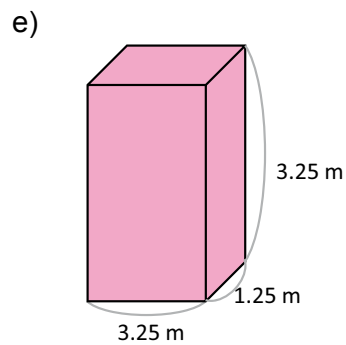
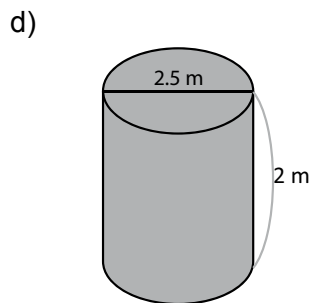
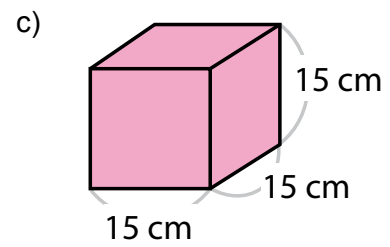
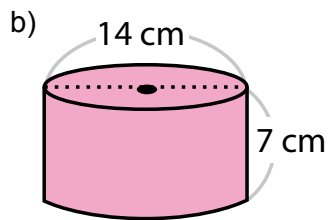
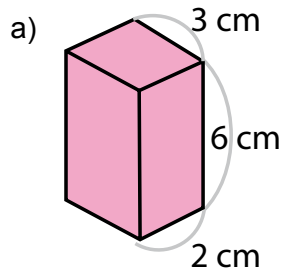
Volumen del cono = $\frac{1}{3}$ * área de la base * altura



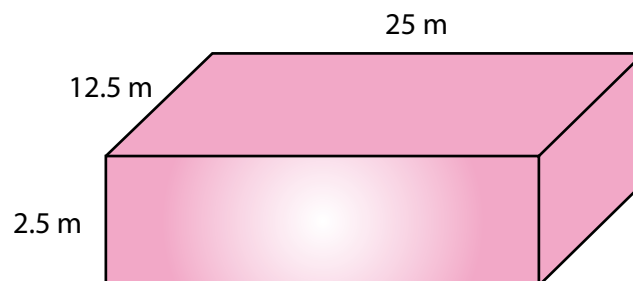
Volumen de la esfera = $\frac{4}{3} * \pi * r^3$

Practiquemos

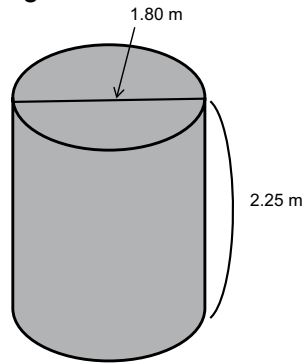
1) Calculemos el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.



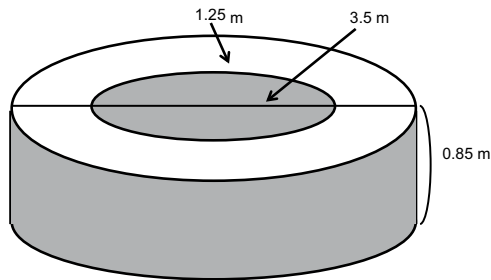
2) Encontramos el volumen de una piscina que tiene las medidas tal como se presentan en el dibujo siguiente:



- 3) Encontremos el volumen de un silo para guardar maíz que tiene las medidas tal como se presentan en el dibujo siguiente:



- 4) Encontremos cuántos metros cúbicos de abono orgánico, se necesitan para un jardín de forma cilíndrica con una abertura en el centro, tal como se muestra en el dibujo.



- 5) Calculemos el volumen en cm^3 de una caja de 0.6 metros de largo, 3 decímetros de ancho y 220 milímetros de alto.
Elabore un dibujo para el problema.
- 6) En un almacén de dimensiones: 5 metros de largo, 3 metros de ancho y 2 metros de alto, queremos almacenar cajas de dimensiones de 10 decímetros de largo, 6 decímetros de ancho y 4 decímetros de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar?
Elabore un dibujo.
- 7) ¿Cuántos azulejos cuadrados de 20 cm de lado se necesitan para recubrir una piscina de 10 metros de largo, 6 metros de ancho y 2 metros de profundidad?
Elabore un dibujo.

Medidas de tendencia central

Recordemos

Estadística. Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades (RAE).

Promedio. Cantidad igual o más próxima a la media aritmética, en la siguiente tabla se muestra el número de horas que Rolando se dedica a la mecánica, durante una semana.
¿En promedio cuántas horas se dedica a su trabajo por día?

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Horas	4	5	3	4	5	4

Observemos la solución: $\frac{4 + 5 + 3 + 4 + 5 + 4}{6} = \frac{25}{6} = 4.17$ horas

Población. Conjunto del cual se estudian una o varias variables estadísticas.

Muestra. Está determinada como un subconjunto de la población.

Tabulación. Expresar valores, magnitudes u otros datos por medio de tablas.

Probabilidad. En un proceso aleatorio es la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. La probabilidad de algún evento P(E) es la razón entre los casos favorables al evento y el número total de eventos.

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento } E}{\text{Número total de eventos posibles}}$$

Practiquemos

- 1) Elaboremos un pictograma representado con los emoticones que tenemos a continuación, para eso elaboremos una encuesta que los estudiantes del aula contesten sobre diferentes estados de ánimo, en un día determinado.

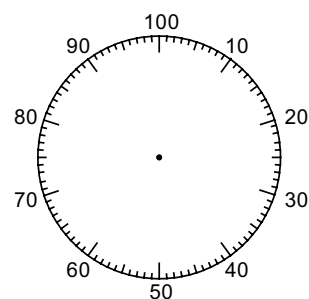


- 2) Representemos en un gráfico de barras el cuadro de flores y obtengamos el promedio de producción.

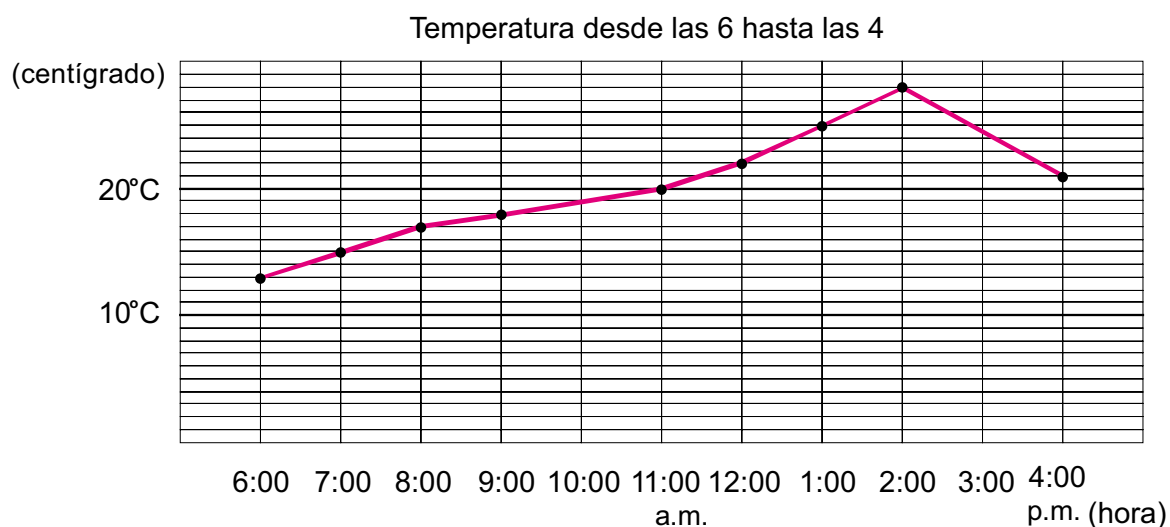
Producción de flores	
Clases de flores	Cantidad
Claveles	200
Rosas	600
Cartuchos	450
Geranios	500
Orquídeas	650
Crisantemos	620
Gerberas	720

- 3) Investiguemos cómo se elabora un gráfico circular y elaboremos un gráfico utilizando la información del cuadro. Tomar en cuenta que debemos calcular los porcentajes.

Favorito	No. de personas	Porcentaje
Radio	90	
Televisión	180	
Cine	60	
Teatro	60	
Deporte	126	
Baile	84	

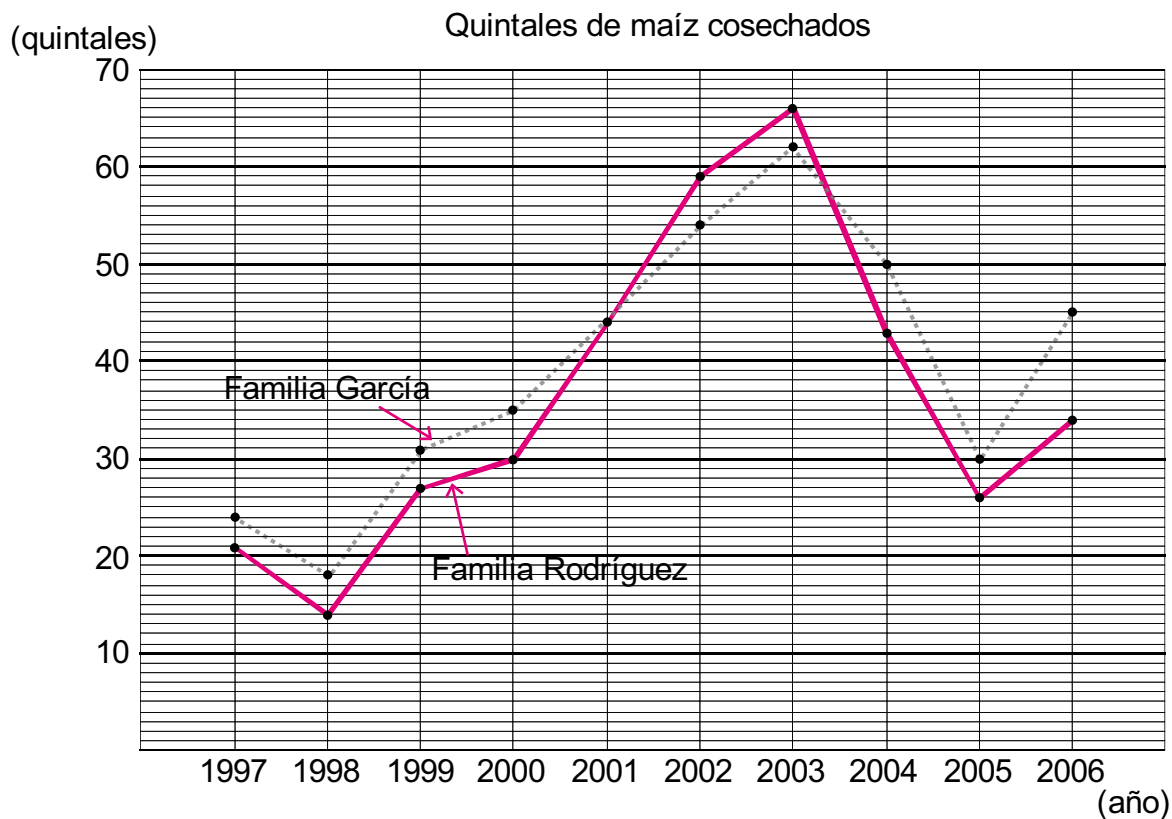


- 4) Interpretemos la gráfica poligonal y contestemos las preguntas que se formulan al respecto de la misma.



- a) ¿Qué temperatura hubo a las 12 del mediodía?
- b) ¿A qué hora se dio una temperatura de 18 grados centígrados?
- c) ¿A qué hora se dio la temperatura más alta?
- d) ¿A qué hora se dio la temperatura más baja?

5) Contestemos la información observando la siguiente gráfica poligonal que representa los quintales de maíz que han cosechado dos familias durante 10 años.



- a) ¿Qué familia cosechó más en 1998?
- b) ¿En qué año cosecharon la misma cantidad de quintales?
- c) ¿En qué año cosechó más la familia García que los Rodríguez?
- d) ¿En qué año cosechó más la familia Rodríguez que los García?
- e) ¿En qué año hubo más diferencia de cosecha de las dos familias?
- f) ¿Cuál es el promedio de producción de cada familia de 1997 al 2004?

- 6) Calculemos la media aritmética de los puntos obtenidos por Josselyn en las 6 asignaturas, con base en 100 puntos.

Comunicación y lenguaje -----	89 puntos
Matemática -----	98 puntos
Ciencias naturales y tecnología -----	92 puntos
Educación física -----	100 puntos
Formación ciudadana -----	67 puntos
Productividad y desarrollo -----	78 puntos

$\bar{X} = \underline{\hspace{2cm}}$

- 7) Las edades de diez niños son: 15, 12, 9, 11, 9, 8, 13, 10, 8 y 14 años.
¿Cuál es la edad promedio?

- 8) Investiguemos el valor de la mediana en los siguientes ejercicios:

a) 9,8,12,13,14,13,12,7,8,9, 11, 13, 15

b) 123,124,125,134,138,138,139,126,127

- 9) Sabiendo que la fórmula para determinar la mediana es:

$$Md = Li + \left[\frac{\frac{N}{2} - fai}{f} \right] i$$

Cada elemento de la fórmula significa:

Li = límite real inferior del intervalo donde se encuentra la mediana

N = número de datos

fai = frecuencia acumulada anterior al intervalo donde se encuentra la mediana

f = frecuencia del intervalo donde se encuentra la mediana

i = tamaño de clase

Investiguemos la aplicación de la misma para las siguientes distribuciones:

a)

x	f
40	3
85	5
80	7
70	3
75	2
55	1
60	1
55	2

b)

x	f
200	7
125	8
150	9
50	11
80	1
145	2
230	5

- 10) Investiguemos en el grupo de estudiantes la edad, estatura y peso de cada uno, luego calculemos el promedio de cada variable.
- 11) Observemos el cuadro del estado del tiempo y determinemos ¿cuál es la moda en ese período de tiempo?

Ahora	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00
							
25° C	25° C	23° C	23° C	20° C	18° C	17° C	15° C

- 12) Para calcular la moda en datos agrupados utilizamos la siguiente fórmula:

$$Mo = Li + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right] i$$

Cada elemento de la fórmula significa:

- Li = Límite inferior del intervalo donde se encuentra la moda
 Δ_1 = Diferencia entre la frecuencia mayor y la frecuencia anterior
 Δ_2 = Diferencia entre la frecuencia mayor y la frecuencia posterior
i = Tamaño de clase o amplitud del intervalo

En la siguiente tabla se muestran las calificaciones (necesita mejorar, regular, aceptable, excelente) obtenidas por un grupo de 50 estudiantes. Calculemos la moda, utilizando todos los datos de la fórmula.

Notas	x	i
0-5	15	3
5-7	20	10
7-9	12	6
9-10	3	3

- 13) Investiguemos y calculemos la mediana y la moda de un grupo de notas obtenidas por el grupo de estudiantes de matemática.

14) En el siguiente recuadro observamos las notas del alumno Benjamín, contestemos:

a) ¿Cuál es el promedio?

Calificaciones de Benjamín



15) Calculemos la probabilidad de que Jorge se gane el premio de una rifa donde se vendieron 60 números.

16) Calculemos la probabilidad de que al lanzar un dado suceda lo siguiente:

a) Caiga un número par

b) Caiga un número menor que cinco

c) Un número par y menor que cuatro

17) Un cubo tiene sus caras con las letras A, B, C, D, E y F. Si lo lanzamos al aire, ¿Cuál es la probabilidad de obtener la letra D?



Lógica matemática

Recordemos

Lógica: es la ciencia que estudia los métodos o procedimientos que aplican definiciones y leyes con el objetivo de determinar la validez o invalidez de las inferencias, razonamientos o argumentos.

Proposición: es un enunciado del cual podemos afirmar si es verdadero o falso en forma exclusiva. Ejemplo: Enero es el primer mes del año.

Valores de verdad: toda proposición se puede calificar como verdadera (V) o falsa (F).

Negación: la negación de una proposición es la que invierte o cambia su valor de verdad.

Ejemplo:

p: 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son los divisores de 12 (V).

La negación de la proposición anterior es: $\neg p$: 1, 2, 3, 4, 6 y 12; no son los divisores de 12 (F).

Tabla de verdad de la negación.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Proposiciones simples: son aquellas que no contienen conectivos u operadores. Esto es, no podemos obtener otras proposiciones, ni siquiera el término no.

Ejemplo: Amaneció un día nublado.

Proposiciones compuestas: están constituidas por más de una proposición simple unidas por términos llamados operadores o conectivos lógicos.

Ejemplo: Ana compró un carro **y** una casa.

Conectivo	Símbolo
y	$\wedge$
o	$\vee$
Si... entonces	$\rightarrow$
Si y solo si	$\leftrightarrow$
No	$\sim$

Valores de verdad de proposiciones compuestas.

Conjunción: es una proposición compuesta de dos o más proposiciones simples mediante el conectivo **y** ($\wedge$).

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción: una proposición disjunta se construye enlazando dos proposiciones simples con el conectivo **o** ($\vee$).

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación: una proposición compuesta es implicación cuando sus componentes están relacionados por el conectivo **si...entonces** ($\rightarrow$).

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Doble implicación o equivalencia: una proposición compuesta es equivalente cuando cada componente implica al otro, su símbolo es $\leftrightarrow$, se lee **si y solo si**.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fórmulas lógicas: son expresiones que se forman con variables, conectivos lógicos y signos de agrupación.

Ejemplo: $(p \rightarrow q) \vee \sim (p \wedge q)$.

Las fórmulas lógicas se clasifican en:

- **Consistentes:** cuando es verdadera por lo menos en una de sus interpretaciones.
- **Tautológicas:** cuando es verdadera en toda interpretación posible.
- **Contradictoria:** cuando es falsa en todas sus interpretaciones.

Practiquemos

- 1) Escribamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones dentro del paréntesis (V: verdadera, F: falsa).

- a) p: Guatemala es un país centroamericano. ()
- b) s: 9 es un número primo. ()
- c) r: $5 < 7 < 10$ ()
- d) t: $6 * 2 = 15$ ()
- e) g: $10 \div 3 = 3 \div 10$ ()
- f) c: 3 es menor que 7 ()

- 2) Encontramos al menos un valor de x para que la expresión se convierta en proposición verdadera y otro valor de x para que se convierta en falsa.

- a) $x < -5$
- b) $x^2 - 9 = 0$
- c) $-3 < x < 5$
- d) $3x + 1 = -2$
- e) $15x^2 + 9x - 24 = 0$
- f) $\frac{x}{5} - 3 = 10$
- g) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$

- 3) Escribamos tres proposiciones simples y cuatro proposiciones compuestas.

- 4) Construyamos y respondamos si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones compuestas

p: la mariposa es un insecto

q: el perro es un mamífero

- a) $p \wedge q$
- b) $q \rightarrow p$
- c) $p \vee q$
- d) $\sim p \wedge \sim q$
- e) $p \leftrightarrow q$
- f) $\sim q \rightarrow \sim p$
- g) $\sim p \vee \sim q$

- 5) Evaluemos las siguientes fórmulas lógicas e indiquemos si son tautologías, contradicciones o ninguna de las dos.

- a) $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$
- b) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee p)$
- c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (q \wedge \sim p)$
- d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
- e) $\sim (\sim p) \leftrightarrow p$

6) Mario, Clara, Samuel y Karina fueron contratados como entrenadores de un Instituto de Telesecundaria. Los puestos fueron de entrenador de baloncesto, tenis, natación y voleibol. La hermana de Mario está entre los contratados y entrenará en tenis. Ni Mario ni Samuel han jugado baloncesto ni saben cómo entrenar a esos deportistas. Karina nunca aprendió a jugar tenis. A Samuel le disgustan los deportes de raqueta. ¿Quién fue contratado para cada deporte?

7) En una carrera de ciclismo contra reloj, cinco ciclistas terminaron dentro de los mismos 8 segundos. El primer ciclista llegó un segundo adelante del ciclista 4, que no fue el último. El ciclista 2 llegó seis segundos antes que el ciclista 5, que llegó tres segundos detrás del ciclista 1, el cual a su vez, llegó cinco segundos después del ciclista 3. ¿En qué orden llegaron los ciclistas?

8) Roberto preguntó a cuatro de sus amigos: ¿cómo se ordenarían ustedes respecto a sus edades de mayor a menor? A lo que cada uno contestó:

Jorge: mi amigo Byron es mayor que yo.

Byron: Tomás es mayor que yo.

Tomás: yo nací antes que Jorge.

Cristian: Yo soy mayor que Byron y menor que Tomás.

Analicemos las respuestas anteriores e indiquemos el orden pedido por Roberto.

9) De tres números: x , y , z , se sabe que x es menor que y , y que y es menor que z , a partir de lo anterior, se concluye que:

a) z es mayor que x

b) x es mayor que z

c) x y z son iguales

d) y es mayor que z

Analicemos las respuestas y elijamos la correcta.

10) Para llegar a la escuela, un alumno debe caminar 240 pasos, ¿Cuántos minutos tardará en llegar si da cuatros pasos en la tercera parte de un cuarto de minuto?

Expresiones algebraicas

Recordemos

Para trabajar con números reales tomar en cuenta que:

Expresión aritmética	Expresión algebraica
-5	$3x$
$2 - (\sqrt{9} / 3)$	$2ab$
$(5-2) * (4-8)$	$x^2 + xy - 5$

$\frac{2a^2b^3}{c}$, entonces 2 es el coeficiente numérico y a^2b^3/c es el coeficiente literal

Propiedades de la potenciación: $a^m * a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)a^n = a^{mn}$

Practiquemos

1) Encontremos el valor de cada variable

a)	Monomio	Valor numérico del monomio	Valor de la variable
a)	$3a^2$	12	a=
b)	$\frac{1}{3}m$	14	m=
c)	$12n^3$	-7	n=
d)	$\frac{1}{4}p^5$	8	p=
e)	$16s^2$	4	s=

b) Razonamiento: verifiquemos si la descomposición en **factores primos** es correcta. Luego de verificar coloquemos un ✓ si estamos de acuerdo.

a) $49,000 = 8 * 125 * 49$ ☐

b) $2,352 = 2^4 * 3 * 7^2$ ☐

c) $4,488 = 8 * 3 * 11 * 17$ ☐

d) $1224 = 2^3 * 3^2 * 17$ ☐

2) Encontremos el valor numérico de:

a) $4m\sqrt{2b^3b^4}$ si $m = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{4}$

b) $3\sqrt[3]{64b^3c^3}$ si $b = \frac{1}{23}$ y $c = \frac{1}{3}$

3) Encontremos el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes

$a = 4$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -\frac{1}{3}$ $p = 9$ $m = 2$

a) $\frac{2}{3}a^3 bc^2$

b) $\frac{\frac{1}{2}a^3}{\frac{2}{3}b^2}$

c) $3a^2 - a - 10$

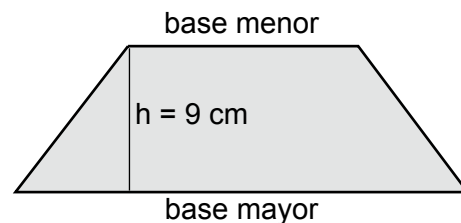
d) $\sqrt{49} + \sqrt{4b} - \sqrt{9m + 7}$

e) $4am^2 + 4m^3ba - 2m^2b + 4bp$

Resolución de problemas (Aplicando la fórmula)

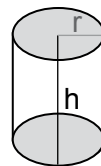
4) Calculemos el área de un trapecio de 9 cm de altura cuyas bases miden 7 y 9 cm respectivamente.

$\text{Área (trapecio)} = \left(\frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \right) \cdot h$



5) Encontremos el volumen de un cilindro cuyo radio mide 7m y cuya altura mide 10m. $\pi = 3.14$

$V = \pi r^2 h$



6) ¿Cuál es el volumen de una pelota de fútbol cuyo diámetro mide 6.3 pulgadas?

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Factorización

Recordemos

Algunas de las propiedades de los números Reales.

Propiedad conmutativa de la suma y multiplicación	Propiedad asociativa de la suma y multiplicación	Propiedad distributiva	Propiedad del inverso aditivo	Propiedad del inverso multiplicativo
$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$	$a(b + c) = ab + ac$	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$

Algunos temas fundamentales.

Operaciones con enteros	Máximo común divisor	Multiplicaciones de polinomios	Fórmulas generales de productos
$-3 + (-5) = -8$ $6 + (-4) = 2$ $4 + (-7) = -3$ $7 - (-3) = 10$ $-8 - (-5) = -3$ $(-3)(-4) = 12$ $(-6)(3) = -18$ $9 \div (-3) = -3$	MCD de: 12 y 9 es 3 Sus divisores son: 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12 9: 1, 3, 9 MCD de: 6 y 12 es 6 6, 12, 15 es 3	$2a(4a + 5) = 8a^2 + 10a$ $(x+7)(x-4) = x^2 + 3x - 28$ $(3m+5)(4m-7) = 12m^2 - m - 35$	$m(a \pm b) = ma \pm mb$ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Practiquemos

Factorización de polinomios

1) Factoricemos polinomios utilizando el factor común.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $24x^2 - 18$ | e) $cd + 3c - 3d - 9$ |
| b) $21m^2 + 14m$ | f) $t^3 - 11t^2 + t - 11$ |
| c) $14x^4 + 21x^3 + 9x^2$ | g) $x^3 + 2x^2 + x + 2$ |
| d) $y^2 - 6y + 2y - 12$ | h) $u^2 + uv - 4u - 4v$ |

2) Factoricemos utilizando la diferencia de cuadrados.

- | | |
|-------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 64$ | d) $a^2b^2 - c^2$ |
| b) $16y^2 - 9z^2$ | e) $1 - x^2$ |
| c) $a^2b^2 - 16$ | f) $25 - (y - 3)^2$ |

3) Factoricemos trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

a) $x^2 + 5x + 4$

f) $n^2 - 4n - 21$

b) $a^2 + 2a - 8$

g) $x^2 - 10x + 24$

c) $m^2 - m - 20$

h) $x^2 - 21x + 96$

d) $h^2 - 6h + 8$

i) $a^2 - 3a - 10$

e) $y^2 + 7y - 30$

j) $a^2 + 2a - 24$

4) Factoricemos trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

a) $3a^2 + 4a + 1$

e) $5m^2 + 7m + 2$

b) $8t^2 - 6t - 5$

f) $6c^2 + 4c - 2$

c) $2a^2 - 13a + 20$

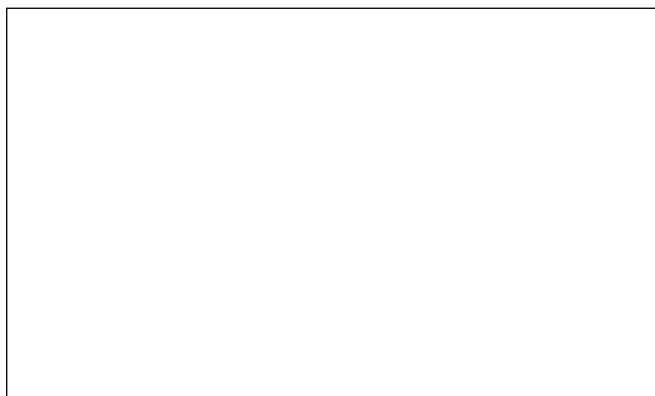
g) $5m^2 + 7m + 2$

d) $2y^2 + 9y - 35$

h) $2x^2 + 3x - 2$

5) Grafique un trinomio cuadrado perfecto.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Ecuaciones de segundo grado

Recordemos

Propiedad del factor cero.

Si u y v son factores: $u \cdot v = 0$, entonces $u=0$ o $v=0$

Raíz cuadrada

1. $\sqrt{25} = 5$

2. $\sqrt{144} = 12$

3. $\sqrt{625} = 25$

Valor numérico.

1) $4x - 5$, si $x=2$

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= 4(2) - 5 && \text{sustituimos valores} \\ &= 8 - 5 && \text{calculamos} \\ 4x - 5 &= 3 \end{aligned}$$

2) $5a + 3b$ Si $a = -2$ y $b = 4$

$$\begin{aligned} 5a + 3b &= 5(-2) + 3(4) \\ &= -10 + 12 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3) $n + \sqrt{abc}$ Si $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$ y $n = -5$

$$\begin{aligned} n + \sqrt{abc} &= -5 + \sqrt{(2)(4)(8)} = -5 + \sqrt{64} \\ &= -5 + 8 && \begin{array}{l} \nearrow 8 \\ \searrow -8 \end{array} \\ &= -5 - 8 \\ n + \sqrt{abc} &= 3 && n + \sqrt{abc} = -13 \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones.

1) $4x - 7 = 2x + 3$

$$4x - 7 + \cancel{7 - 2x} = 2x + 3 + \cancel{7 - 2x} \quad \text{Agrupación de términos semejantes, utilizando propiedad del inverso aditivo.}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2x &= 3 + 7 && \longrightarrow \text{Cancelación de inversos aditivos.} \\ 2x &= 10 && \longrightarrow \text{Reducción de términos semejantes.} \end{aligned}$$

$$2x \left(\frac{1}{2}\right) = 10 \left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow \text{Propiedad inverso multiplicativo.}$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{10}{2} \longrightarrow \text{Simplificación de fracciones.}$$

$$x = 5$$

Practiquemos

1) Resolvamos ecuaciones utilizando la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- b) $2x^2 - x - 6 = 0$
- c) $3x^2 + 4x - 15 = 0$
- d) $5x^2 - 7x - 90 = 0$
- e) $27x^2 + 12x - 7 = 0$

2) Resolvamos ecuaciones cuadráticas por medio de factorización.

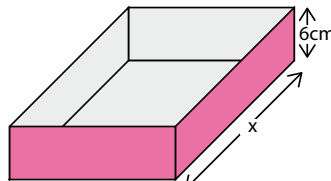
- a) $x^2 + 5x + 6 = 0$
- b) $x^2 + 2x - 24 = 0$
- c) $2x^2 - 6x + 4 = 0$
- d) $6x^2 = 10 - 11x$
- e) $7x = 15 - 30x^2$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

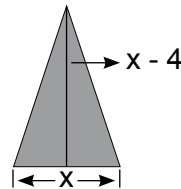
$$\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x_1 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

3) Resolvamos problemas.

- a) La suma de un número positivo y su cuadrado es 240. Encontremos el número.
- b) Se va a construir una caja abierta con una base cuadrada utilizando 880 cm^2 de material (véase figura). ¿Calculemos cuáles deberán ser las dimensiones de la base si la altura de la caja es de 6 cm?
(Pista: el área de la superficie está dada por $S = x^2 + 4xh$).



- c) La altura de un triángulo es 4 centímetros menor que su base. Encuentre la base y la altura del triángulo si su área es de 70 centímetros cuadrados.

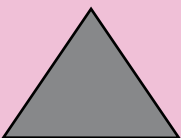
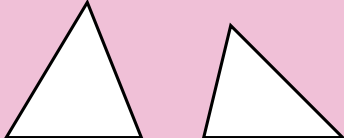
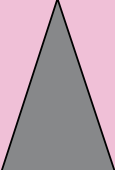
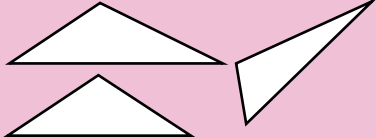


- d) Una bodega de granos básicos de forma rectangular tiene un área de 330 metros cuadrados. El largo de la bodega es 7 metros mayor que su ancho. Encontremos las dimensiones del piso.
- e) Un objeto se lanza hacia arriba desde una altura de 64 pies con una velocidad de 48 pies por segundo. Encontremos el tiempo, t que le toma al objeto llegar al piso resolviendo la ecuación:
 $-16t^2 + 48t + 64 = 0$.

Triángulos

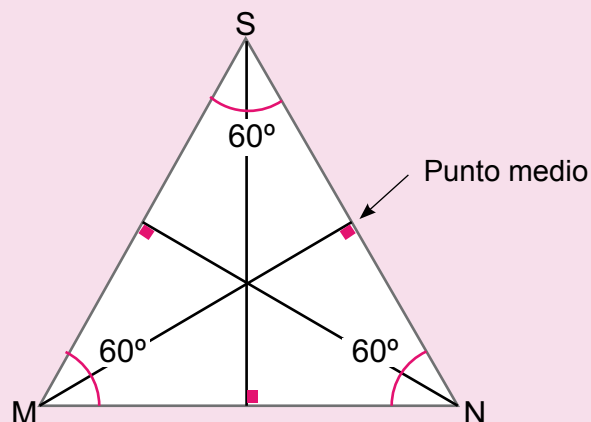
Recordemos

Clasificación de triángulos.

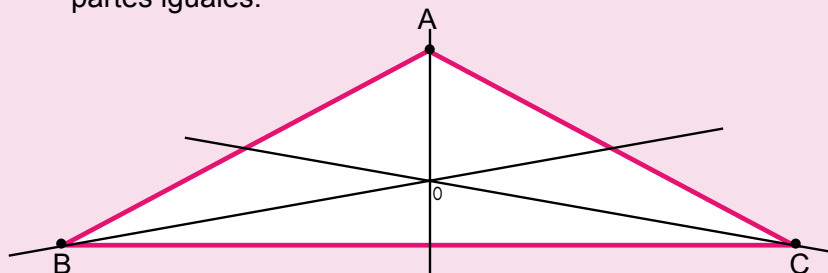
Por sus lados	Por sus ángulos
El triángulo que tiene 3 lados desiguales se llama triángulo escaleno. 	Rectángulo. Que tiene un ángulo recto o varios. 
El triángulo que tiene 3 lados iguales se llama triángulo equilátero. 	Acutángulo. Que tiene 3 ángulos agudos o sea menores de 90°. 
El triángulo que tiene 2 lados iguales se llama triángulo isósceles. 	Obtusángulo. Que tiene uno o más ángulos obtusos o sea mayores de 90°. 

Rectas y puntos notables en el triángulo.

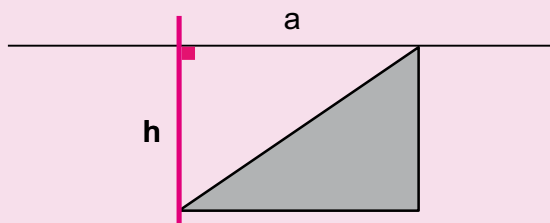
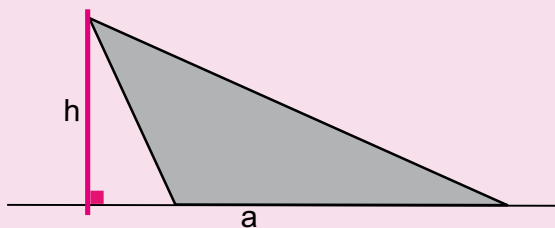
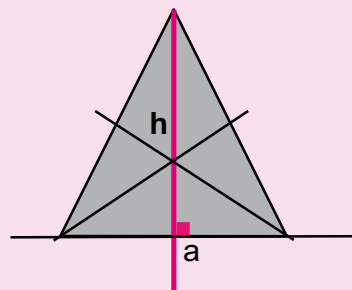
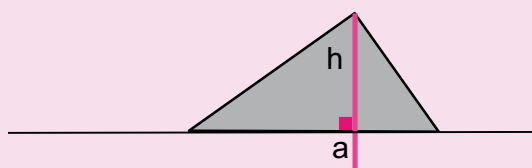
a) **Mediatriz.** En cada triángulo existen tres mediatrices, una de cada lado, como se ven a continuación:



b) Bisectriz. Es la semirecta que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales.



c) Altura. Es la línea perpendicular que se traza desde un vértice, al lado opuesto o a su prolongación.

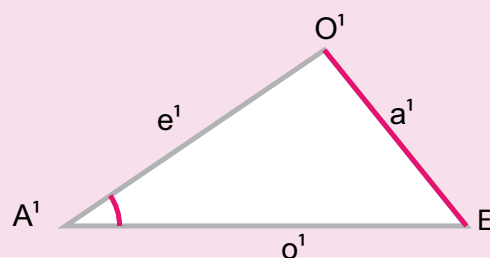
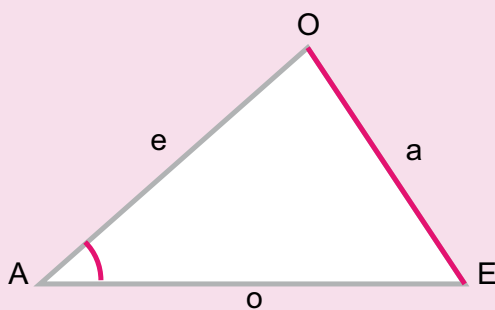


Triángulos semejantes. Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos congruentes y sus lados opuestos son proporcionales.

Ángulos iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{E} = \hat{E}'; \hat{O} = \hat{O}'$$

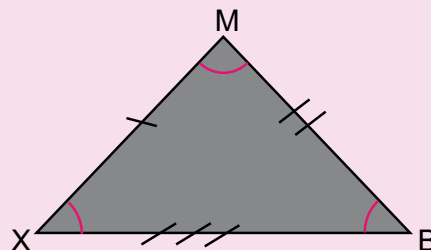
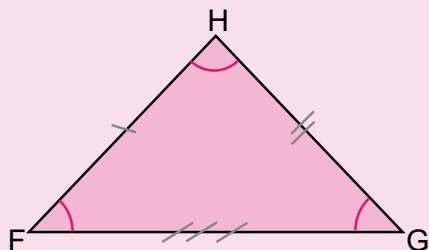
$\Rightarrow \triangle AEO$ y $\triangle A'E'O'$ son semejantes



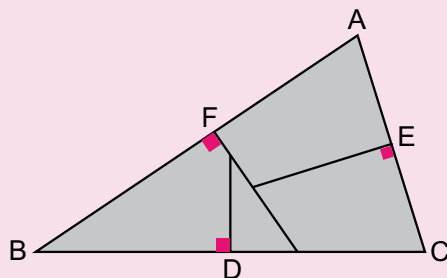
Triángulos congruentes.

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

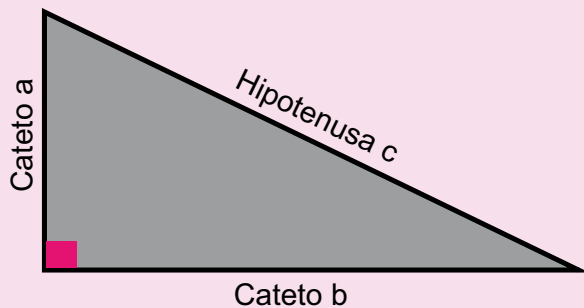
$$\triangle FGH \cong \triangle XBM$$

**Mediatriz.**

Es la perpendicular en el punto medio de cada lado. Existen tres mediatrices que se denominan con la letra M y un subíndice que indica el lado.

**Teorema de Pitágoras.**

En un triángulo rectángulo el lado más largo se define como la hipotenusa y los otros dos lados como catetos. El teorema de Pitágoras demuestra que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

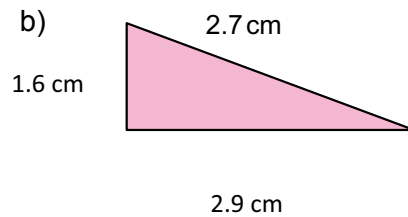
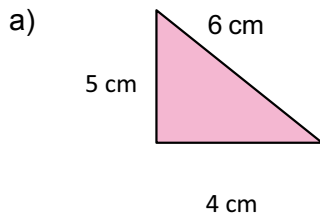
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

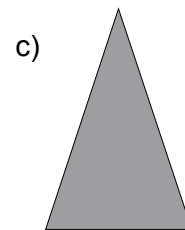
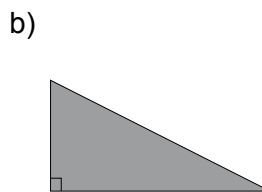
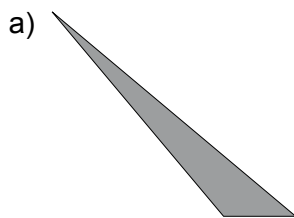
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Practiquemos

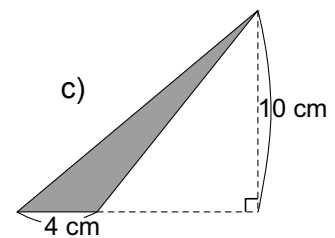
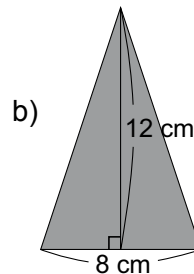
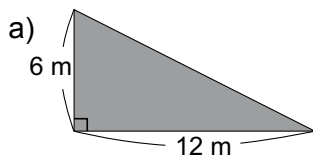
1) Calculemos el perímetro de los siguientes triángulos. Tomemos en cuenta las medidas de cada figura.



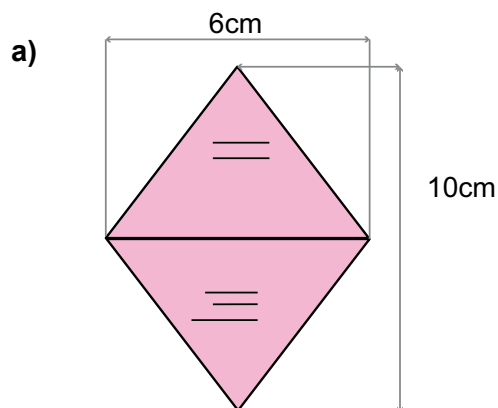
2) Tracemos la altura de los siguientes triángulos.



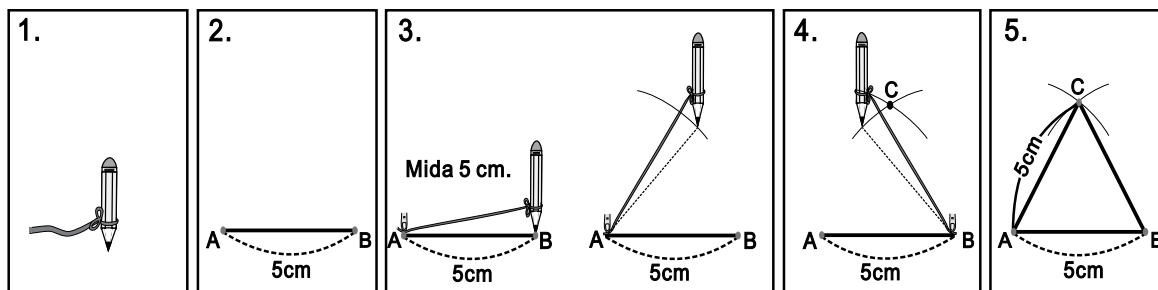
3) Calculemos la medida del área de los triángulos siguientes.



4) Determinemos el área de la siguiente figura.



b) Practiquemos la manera de trazar un triángulo equilátero.



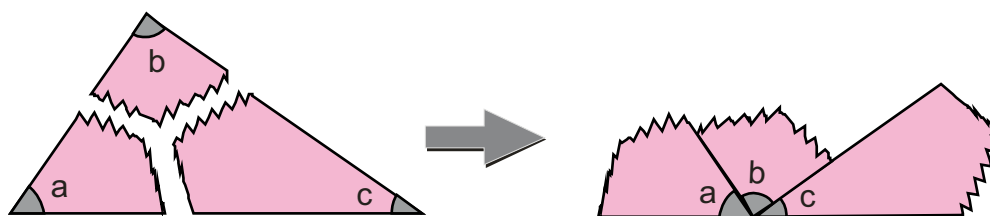
5) Determinemos si en cada caso podemos construir un triángulo, si no es posible deberemos justificar nuestra respuesta.

a) $a = 1\text{ cm}$, $b = 2\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$

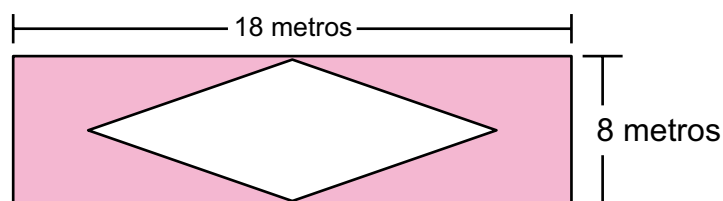
b) $L = 70^\circ$, $S = 70^\circ$, $R = 70^\circ$

c) $a = 11\text{ cm}$, $b = 11\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$

6) Elaboremos un triángulo y luego hagamos el ejercicio tal como se muestra a continuación. ¿Cuál es nuestra conclusión?

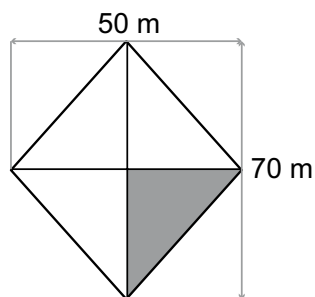


7) Compraremos un cielo raso como el de la figura:

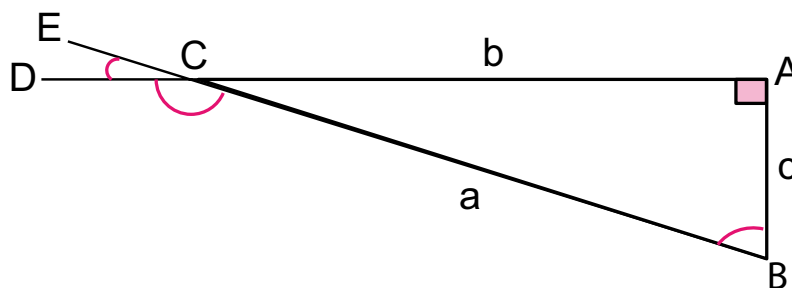


Si el m^2 cuesta Q 55.00 ¿cuánto hay que pagar para cubrir toda la forma?

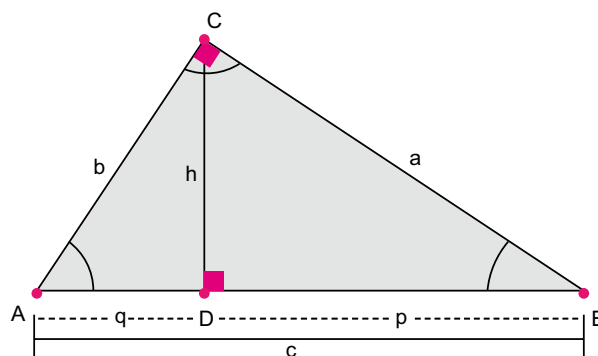
- 8) El techo triangular se vende a Q25.00 el metro cuadrado. Si se quiere cubrir todo el techo completo que tiene forma de rombo y sus diagonales miden 70 m y 50 m cada una, ¿cuánto se debe pagar?



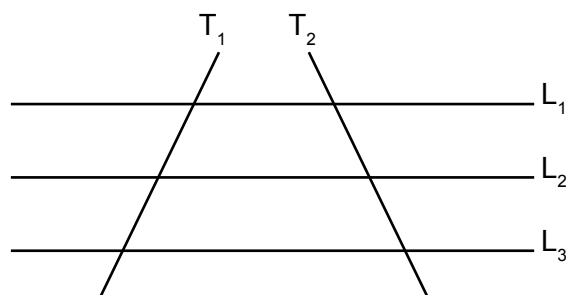
- 9) Observemos la figura y luego midamos cada ángulo señalado.



- 10) Investiguemos y demostremos el Teorema de Euclides. (Por semejanza de triángulos).



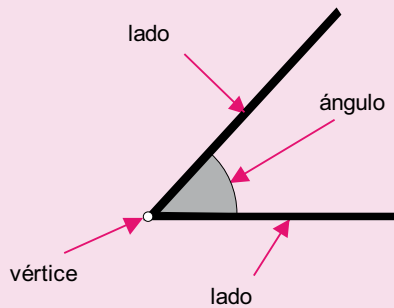
- 11) Investiguemos y demostremos el Teorema de Tales. Use proporcionalidad y semejanza.



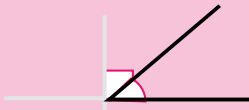
Funciones trigonométricas

Recordemos

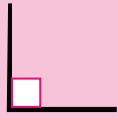
Ángulos Dos lados con un vértice en común forman un ángulo.



Clases de ángulos.



El ángulo menor que un ángulo recto se llama **ángulo agudo**.

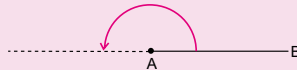


ángulo recto es el que mide 90°

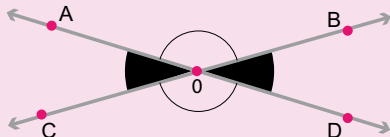
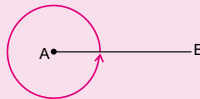


El ángulo mayor que un ángulo recto se llama **ángulo obtuso**.

Los ángulos que miden 180° se llaman **ángulos llanos**.



Los ángulos que miden 360° son **ángulos completos**.

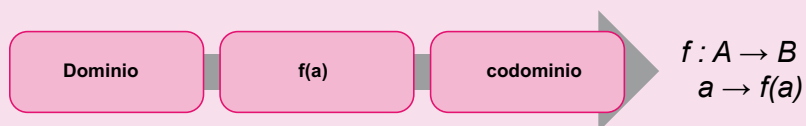


Cuando se cruzan dos líneas rectas se forman cuatro ángulos opuestos por el vértice dos a dos, $\angle AOC$ es opuesto al $\angle BOD$

$\angle AOB$ es opuesto $\angle BOD$

Función.

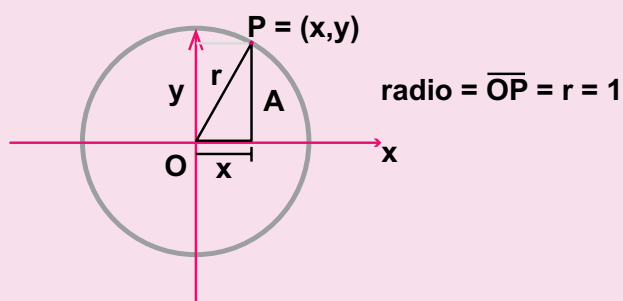
Una cantidad o magnitud es función de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. La forma de denotar una función es:



Donde A es el dominio de la función f, su conjunto de partida B es el codominio de f (su segundo conjunto o conjunto de llegada)

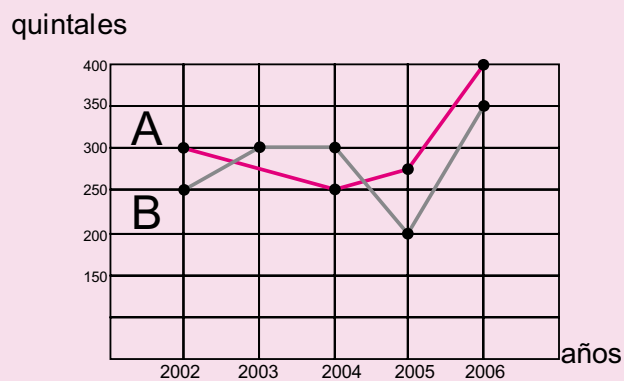
Círculo unitario.

El círculo unitario es aquel cuyo radio mide una unidad, también es llamado círculo trigonométrico.



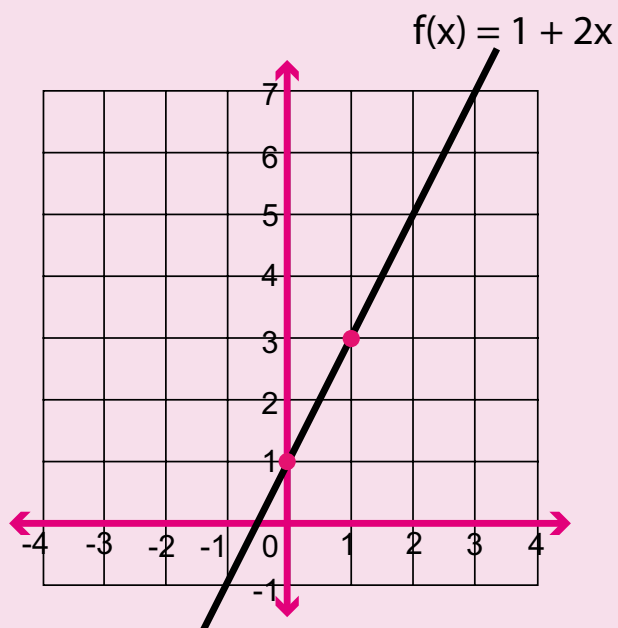
Representación gráfica de funciones:

Cosecha de manzanas



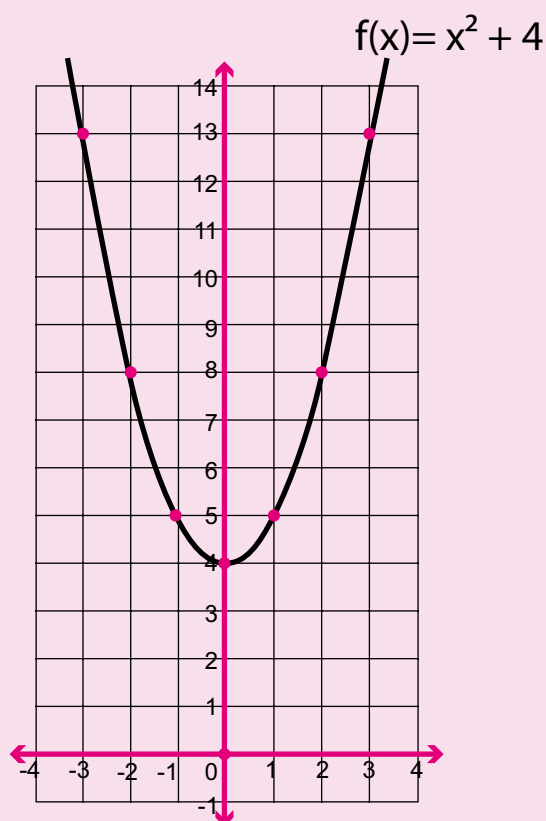
- Función lineal = $mx + b$
 $f(x) = 1 + 2x$

x	f(x)
2	5
0	1



- Función cuadrática
 $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	f(x)
3	13
2	8
1	5
0	4
-1	5
-2	8
-3	13

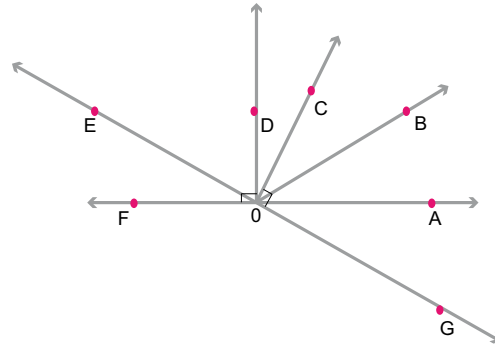


Practicemos.

- 1) En la siguiente figura sabiendo que $\overline{DO} \perp \overline{FA}$ y $\overline{EG} \perp \overline{OC}$, encontremos lo que se indica:

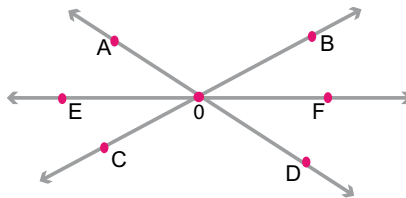
- a) Ángulos complementarios
- b) Ángulos suplementarios

(Investiguemos el procedimiento.)

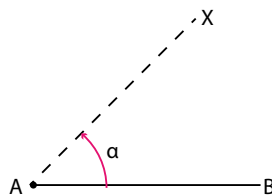


- 2) Consultemos bibliografía de apoyo e identifiquemos lo siguiente:

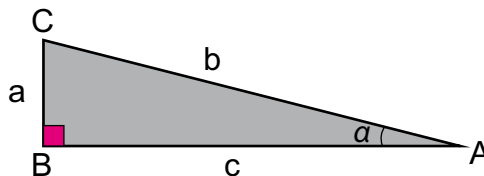
- a) Dos ángulos opuestos por el vértice
- b) Dos ángulos contiguos no adyacentes
- c) Dos ángulos adyacentes



- 3) Calculemos las funciones trigonométricas del ángulo $\angle XAB = \alpha$, sabiendo que $A(1,2)$, $B(6,2)$, $X(6,7)$. Recuerde utilizar la distancia entre dos puntos.



- 4) Investiguemos las 6 funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo ABC, como el que se muestra en la figura.



- 5) Practiquemos trazando en una cartulina un círculo de 10 cm de radio, con ejes x y; de origen en su centro. Como el radio es unitario, $10 \text{ cm} = 1$, luego encontremos por medición directa y con dos cifras decimales, el valor de las seis razones trigonométricas.

a) $A = 36^\circ$

b) $A = 25^\circ$

- 6) Completemos el siguiente cuadro:

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°						
45°						
60°						

- 7) Escribamos al lado de cada una de las expresiones siguientes, el valor y el signo que le corresponde.

a) $\text{sen } 120^\circ$

b) $\text{sec } 200^\circ$

c) $\text{tan } 190^\circ$

d) $\text{cot } 160^\circ$

e) $\text{csc } 270^\circ$

f) $\text{sec } 45^\circ$

- 8) En un círculo trigonométrico señalemos las líneas trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos.

a) 30°

d) 45°

g) 300°

b) 120°

e) 135°

h) 275°

c) 210°

f) 150°

i) 330°

- 9) Realicemos estos ejercicios tomando en cuenta las relaciones entre los ángulos del círculo trigonométrico, reduciendo las funciones trigonométricas a otras equivalentes, de ángulos menores a 45° .

a) $\text{sen } 74^\circ$

c) $\text{sec } 70^\circ$

e) $-\text{sen } 50^\circ$

b) $\text{tan } 65^\circ$

d) $\cos 80^\circ 30' 10''$

f) $\cot 50^\circ$

- 10) Utilicemos la calculadora para corroborar los siguientes ejercicios.

a) ¿Es $\text{seno } 60^\circ = 2 \text{ sen } 30^\circ$?

¿y $\cos 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$?

¿y $\tan 60^\circ = 2 \tan 30^\circ$?

b) Se cumple lo siguiente para algún valor de x?

$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x$

$\cos 2x = 2 \cos x$

Gráfica de las funciones trigonométricas

Recordemos

Relaciones entre funciones trigonométricas. Un ángulo es el espacio limitado por dos rayos que tienen origen común. Los ángulos pueden ser medidos en grado sexagesimal o en radianes.

En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos es A, por lo tanto las razones trigonométricas se definen así:

$$\text{sen } A = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } A}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } A}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } A}{\text{Cateto adyacente al ángulo } A}$$

$$\text{csc } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto al ángulo } A}$$

$$\text{sec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente al ángulo } A}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } A}{\text{Cateto opuesto al ángulo } A}$$

Definiciones de funciones trigonométricas.

$$\text{tan } A = \frac{\text{sen } A}{\text{cos } A}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{cos } A}{\text{sen } A}$$

$$\text{csc } A = \frac{1}{\text{Sen } A}$$

$$\text{sec } A = \frac{1}{\text{cos } A}$$

$$\text{cot } A = \frac{1}{\text{tan } A}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{sen } A}{\text{cos } A}$$

Relaciones recíprocas e inversas

$$\text{cos } A * \text{sec } A = \frac{x}{r} * \frac{r}{x} = 1$$

$$\text{cos } A * \text{sec } A = 1$$

Relación fundamental: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Relaciones secundarias: $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
 $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

Practiquemos

1) Elaboremos la gráfica de la función **sen x**. Tomemos en cuenta algunas propiedades:

° El dominio de la función seno es todo $\mathbb{R}$ o sea que para cualquier valor de x en $\mathbb{R}$, existe $\sin x$, también en $\mathbb{R}$.

° El recorrido, imagen o ámbito del seno es $[-1, 1]$. Lo anterior quiere decir que los valores de $\sin x$ varían entre -1 y 1 , de tal manera que el menor valor que puede tomar $\sin x$ es -1 y el mayor es 1 .

Para elaborar la gráfica utilicemos los datos de la tabla siguiente, en el intervalo de 0 a 2π :

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
Sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Observemos la gráfica y respondamos las siguientes interrogantes:

a) ¿Para qué valores de x entre 0 y 2π , $\sin x = 0$?

b) ¿En qué intervalos entre 0 y 2π la función seno es estrictamente creciente?

2) Elaboremos la gráfica de la función $\cos x$. Tomemos en cuenta algunas propiedades:

° El dominio de la función coseno es $\mathbb{R}$, para cualquier valor de x en $\mathbb{R}$ existe $\cos x$.

° El recorrido, imagen o ámbito de la función coseno es $[-1, 1]$. Lo anterior significa que el menor valor que podemos tomar en $\cos x$ es -1 y el mayor valor que podemos tomar en $\cos x$ es 1 y que además todos los valores de $\cos x$ están entre -1 y 1 .

Para elaborar la gráfica utilicemos los datos de la tabla siguiente, en el intervalo de 0 a 2π :

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\cos x$									



Observemos la gráfica y respondamos las siguientes interrogantes:

a) ¿Para qué valores de x entre 0 y 2π $\cos x = 0$?

b) ¿En qué intervalos entre 0 y 2π la función coseno es estrictamente decreciente?

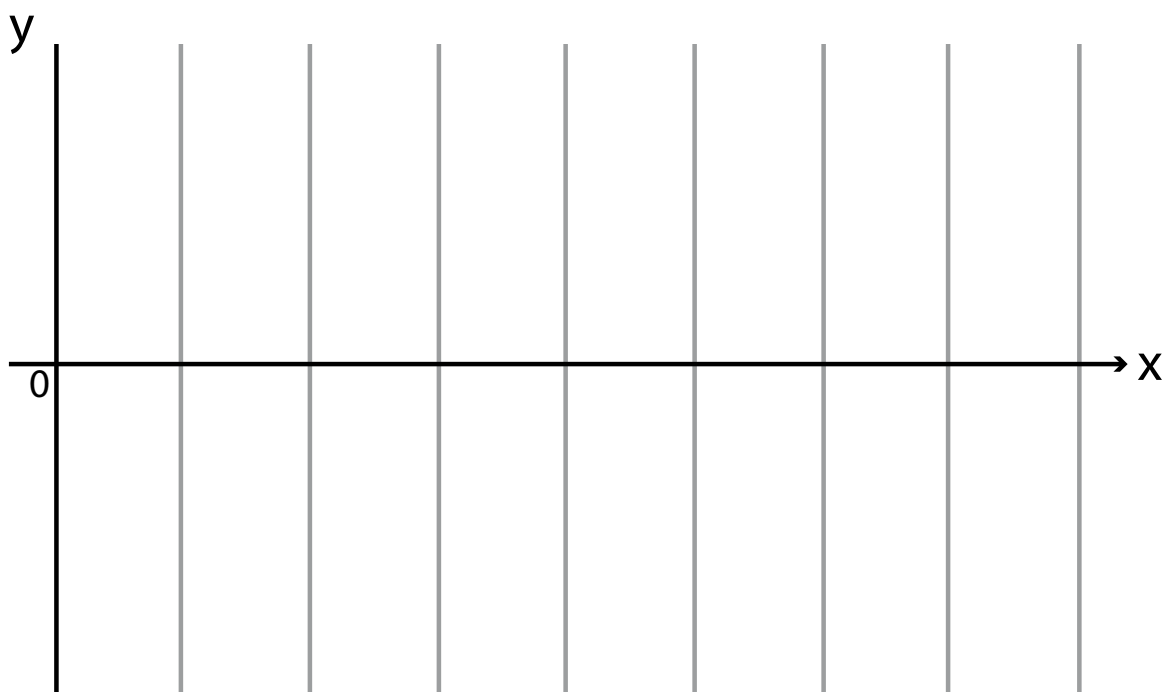
3) Elaboremos la gráfica de la función $\tan x$. Tomemos en cuenta algunas propiedades:

- ° La función tangente no está definida en todo $\mathbb{R}$.
- ° El recorrido, imagen o ámbito de la función tangente es todo $\mathbb{R}$
- ° La tangente no es una función inyectiva.
- ° La tangente es estrictamente creciente en cada intervalo en que está definida.

Para elaborar la gráfica utilicemos los datos de la tabla siguiente, en el intervalo de 0 a 2π :

a)

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
Tan x									



Observemos la gráfica y respondamos las siguientes interrogantes:

b) Escribamos al menos 3 valores de x entre 0 y 2π para los cuales $\tan x = 0$

Funciones exponenciales y logarítmicas

Recordemos

Logaritmos. Es un exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado, entonces el logaritmo de un número es el exponente al que se eleva otro número, llamado base para obtener el número dado.

Los logaritmos vulgares o de Briggs, son de base 10 y los logaritmos naturales o neperianos creados por Neper son de base $e = 2.71828183$.

Los logaritmos decimales tienen como base el número 10 y los logaritmos neperianos tienen como base el número e .

Propiedades de los logaritmos.

- No existen logaritmos de números negativos.
- El logaritmo de 1 es 0.
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^n = n$

Los números mayores que uno tienen logaritmo positivo y los números menores de uno tienen logaritmo negativo.

John Neper. (1550-1617) Matemático y teólogo escocés. A pesar de la notoriedad que le procuraron las más de treinta ediciones de dicha obra, el nombre de Napier había de quedar por siempre ligado al desarrollo de los logaritmos, un método matemático ideado con el objeto de simplificar el cálculo numérico que iba a ejercer una enorme influencia en todos los campos de la matemática aplicada. Napier tardó algo más de veinte años en madurar sus ideas iniciales, que publicó finalmente en 1,614. Poco después, el matemático inglés Henry Briggs se desplazó a Escocia y convenció a Napier para modificar la escala inicial usada por éste; nacieron así los logaritmos de base 10, forma en la que se impusieron en toda Europa.

Euler Leonhard Paul. (1707-1783). Matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Euler ha sido uno de los matemáticos más prolíficos, y se calcula que sus obras completas reunidas podrían ocupar entre 60 y 80 volúmenes. Una afirmación atribuida a Pierre Simón Laplace - expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros.» En conmemoración suya, Euler ha aparecido en la serie sexta de los billetes de 10 francos suizos, así como en numerosos sellos postales tanto suizos como alemanes y rusos. En su honor el asteroide del 2002 se llama Euler.

Logaritmo de un producto.

- $\log (A \times B) = \log A + \log B$
- $\log A^n = n (\log A)$
- $\log \left(\frac{A}{B} \right) = \log A - \log B$
- $\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$

Logaritmos Vulgares o de Briggs.

Los logaritmos que tienen como base 10 se llaman vulgares o decimales.

Veamos la siguiente progresión:

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$$

$$10^1 = 10 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$10^2 = 100 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$10^3 = 1000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$$

Podemos deducir las **propiedades de los logaritmos decimales**:

$$\log_{10} 1 = 0 \qquad \log_{10} 0.1 = -1$$

$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \log_{10} 0.01 = -2$$

$$\log_{10} 100 = 2 \qquad \log_{10} 0.001 = -3$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \qquad \log_{10} 0.0001 = -4$$

Los logaritmos decimales tienen una parte entera llamada característica y una parte fraccionaria llamada mantisa. La característica de un número comprendido entre 1 y 10, es cero. Porque $\log_{10} 1 = 0$ y $\log_{10} 10 = 1$, entonces los números comprendidos entre 1 y otro menor que 10 serán decimales, con entero 0, que es su característica.

La característica de los números superiores o iguales a 10 será un número igual a la cantidad de cifras menos 1 del mencionado número. Así para 10, 20 o 30 su característica es 1; la de 150 es 2. La característica y mantisa de los logaritmos superiores a 1 será positiva. La característica de los logaritmos entre 0 y 1 será negativa y su mantisa positiva.

Cologaritmo de un número es el opuesto de su logaritmo, de manera que:

$$\text{Colog } N = \log \frac{1}{N} = -\log N$$

Regularmente el cálculo de los logaritmos se efectúa en una calculadora científica, antiguamente se utilizaba la tabla de Copetti.

Utilización de calculadora. Muchas resoluciones de problemas se facilitan utilizando una calculadora científica, podemos utilizar youtube para ampliar conocimientos de utilización de la misma.



Fuente: Imágen extraída de internet.

Practiquemos

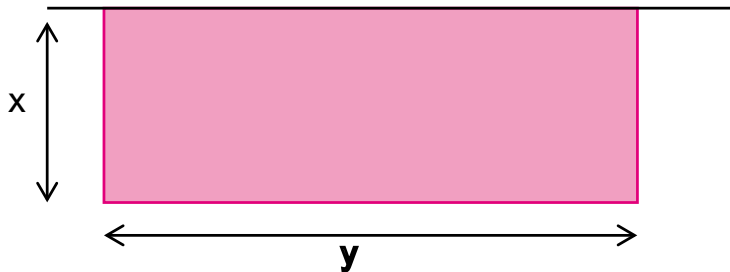
- 1) Investiguemos el dominio y contradominio de la función $y = \frac{1}{x-3}$
- 2) Demos ejemplos de 2 funciones y de dos gráficas que no representen funciones.

- 3) Elaboremos la gráfica de la siguiente función polinomial:

$$f(x) = x^2 + 2 - x$$

- 4) Resolvamos la aplicación de una ecuación polinomial:
Una persona va a cercar un terreno, dispone de 12 metros de alambre de púa. Uno de los lados colinda con una propiedad por lo que no debe de ponerse valla en ese lado.
¿Qué cantidad de alambre de púa se necesita?

Observemos que $2x + y = 12$



- 5) Elaboremos la gráfica de la función: $y = \frac{1}{3}$.

- 6) Observemos la siguiente tabla de valores y luego elaboremos la gráfica correspondiente para $y = 10^x$

x	y
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.4

- 7) Investiguemos la realización de la gráfica de la función: $y = 4 (10^{-x})$.
(Recordemos utilizar una tabla de valores y una calculadora científica).

- 8) La salmonella se reproduce cada 20 minutos, ¿cuál es el factor de crecimiento por hora? Tomemos como referencia el siguiente ejemplo y consultemos bibliografía para resolver.

Las bacterias como la Salmonella se reproducen por Fisión Binaria, es decir, una célula se divide en dos células hijas. En condiciones ideales una bacteria se divide cada 20 minutos. Si no hay interferencias, ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 6 horas?

Este es un problema matemático que se resuelve con la fórmula:

donde n:

nº de bacterias

a: cantidad inicial de ellas

t: tiempo

k: una constante a determinar

En nuestro caso: Una bacteria produce 2 bacterias en 20 minutos. Entonces al cabo de 6 horas (360 minutos) y con el comienzo de una bacteria $n = 262.144$ bacterias.

¿Qué conclusión podemos obtener del caso anterior?

- 9) Investiguemos el comportamiento de las gráficas logarítmicas y luego elaboremos la gráfica de la función: $y = \log_3 x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2

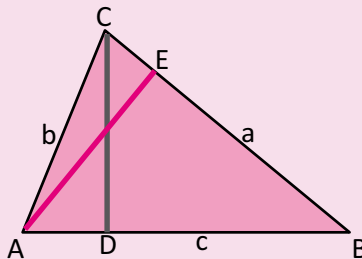
Ley de senos y cosenos

Recordemos

Seno

Ley de senos, en cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo; se utiliza para la resolución de triángulos oblicuángulos, es decir triángulos que no tienen ningún ángulo recto, por lo que no se pueden resolver por el teorema de Pitágoras. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Sea el triángulo ABC



Tracemos las alturas $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$

En el triángulo ACD: $\frac{\overline{CD}}{b} = \text{Sen } A$, por lo tanto $\overline{CD} = b \text{ sen } A$

En el triángulo BCD: $\frac{\overline{CD}}{a} = \text{Sen } B$, por lo tanto $\overline{CD} = a \text{ sen } B$

Comparando 1) y 2), tenemos: $b \text{ sen } A = a \text{ sen } B$, por lo tanto $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$

En el triángulo ACE: $\frac{\overline{AE}}{b} = \text{sen } C$, por lo tanto $\overline{AE} = b \text{ sen } C$

En el triángulo ABE: $\frac{\overline{AE}}{c} = \text{sen } B$, por lo tanto $\overline{AE} = c \text{ sen } B$

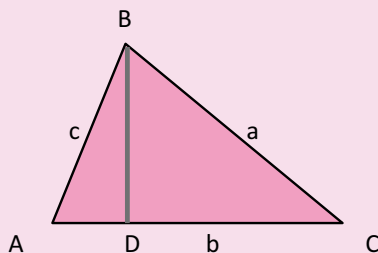
Comparando 4) y 5), tenemos: $b \text{ sen } C = c \text{ sen } B$, por lo tanto $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

Comparando 3) y 6), tenemos: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

Coseno

Ley de cosenos, el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman

Sea el triángulo ABC



Por el teorema generalizado de Pitágoras, tenemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \overline{AD}$

Pero: $\frac{\overline{AD}}{c} = \cos A$, por lo tanto $\overline{AD} = c \cos A$

Sustituyendo tenemos que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b c \cos A$

Análogamente se demuestra que: $b^2 = a^2 + c^2 - 2a c \cos B$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a b \cos C$$

Practicemos

- 1) Apliquemos la ley de senos para encontrar la medida de lados y ángulos faltantes.
 - a) $b = 8$ m, $A = 50^\circ$ y $C = 35^\circ$
 - b) $a = 20$ m, $B = 15^\circ$ y $C = 25^\circ$
- 2) Apliquemos la ley de cosenos para encontrar la medida de los ángulos de los triángulos que tienen la medida de los lados siguientes (tracemos los triángulos):
 - a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm y $c = 2.2$ cm
 - b) $a = 5$ m, $b = 3.3$ m y $c = 7.3$ m
- 3) Apliquemos la ley de cosenos para encontrar la medida de lados y ángulos que faltan (tracemos los triángulos):
 - a) $C = 23^\circ$, $a = 7$ cm y $b = 5$ cm
 - b) $A = 21^\circ$, $b = 12$ m y $c = 9$ m
- 4) Resolvamos problemas aplicando la ley de senos o cosenos.
 - a) Dos puntos A y B sobre el mismo lado de un río distan 30 pies entre sí. Un punto C al otro lado del río está localizado de tal modo que el ángulo $\angle CAB$ mide 75° y el ángulo $\angle ABC$ mide 85° . ¿Cuál es el ancho del río? (Tomado pág. 328 de Álgebra y trigonometría plana de Spitzbart & Bardell)
 - b) Un ángulo de elevación del sol es de 64° , un poste de energía eléctrica está inclinado a un ángulo de 9° en dirección opuesta al sol y arroja la sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Calculemos la longitud del poste (tomado de Álgebra y trigonometría de Swokowski & Cole pág. 676).
 - c) Un poste vertical de 15 m de altura está en una cuesta que forma un ángulo de 24° con la horizontal. Calculemos la longitud mínima del cable que llegará de la parte superior del poste a un punto de 50 metros cuesta abajo (medido desde la base del poste).

Sistema matricial

Recordemos

Valor absoluto de un número. El valor absoluto de un número real es un valor numérico en el cual no se toma en cuenta su signo. Se relaciona con las nociones de magnitud y distancia en contextos matemáticos y físicos. Sus propiedades fundamentales son:

$ a \geq 0$	No negatividad
$ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$	Positividad
$ ab = a b $	Propiedad multiplicativa
$ a + b \leq a + b $	Propiedad aditiva

Sistemas de ecuaciones lineales. Para resolver sistemas de dos o tres ecuaciones lineales utilizamos lo siguiente: método gráfico, método por sustitución, método por eliminación y por matrices. *(Sugerimos que el docente repase cada método de solución con los estudiantes en este apartado solo resolveremos un ejemplo).*

Ejemplo: Utilicemos los métodos de sustitución y gráfico para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\bullet -x + y = 3 \quad (1) \qquad \bullet 3x + y = -1 \quad (2)$$

Si despejamos y en la primera ecuación, tendremos $y = 3 + x$. Luego sustituimos en la ecuación (2) de manera que:

$$\begin{aligned} 3x + (3 + x) &= -1 \\ 3x + 3 + x &= -1 \\ 4x &= -1 - 3 \\ 4x &= -4 \\ x &= -4/4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

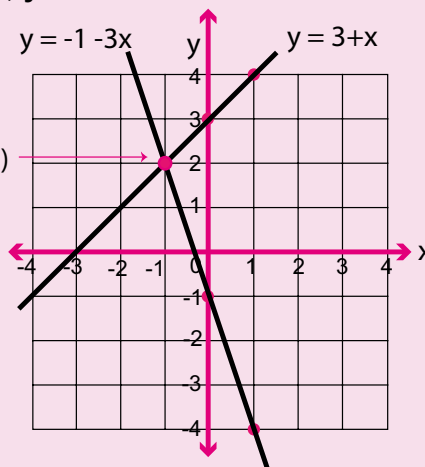
$$\text{Entonces } x = -1; y = 2$$

Gráficamente queda representado así:

$$y = 3 + x \qquad y = -1 - 3x$$

x	y	x	y
0	3	-1	2
1	4	0	-1
2	5	1	-4

Solución : $(-1, 2)$



Practiquemos

1) Resolvamos los siguientes ejercicios sobre matrices:

a) Verifiquemos la trasposición de una matriz

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & -1 & 10 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

b) Sumemos y multipliquemos por un escalar
(Investiguemos el procedimiento) ¿Cuánto vale el escalar a?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{3} & -5 \end{vmatrix}$$

c) Realicemos el siguiente producto. ¿Cuál es el resultado?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}$$

2) Investiguemos la regla de Cramer por medio de la cual se solucionan sistemas por determinantes :

Siendo A_j la matriz resultante de remplazar la columna de A por el vector columna b, para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- $ax + by = e$
- $cx + dy = f$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Presentemos en clase dos ejemplos de utilización de la regla de Cramer para resolver matrices.

Derivadas

Recordemos

Desigualdades. Observemos la resolución del siguiente ejemplo:

$$3(1-x) \leq 6$$

Solución:

$$\text{multiplicamos cada lado por } \frac{1}{3} \qquad (1-x) \leq 2$$

$$\text{sumamos -1 en cada lado} \qquad -x \leq 1$$

$$\text{multiplicamos por -1 cada lado de la inecuación} \qquad x \geq -1$$

Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos $A_1(x, y)$ y $A_2(x_1, y_1)$

$$d = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

Pendiente de una recta. La definición de la pendiente de una recta está determinada por la razón = $\frac{\text{ascenso}}{\text{recorrido}} = \tan \alpha$, siendo α el ángulo de inclinación.

La forma general de la ecuación de la recta es $Ax + By + C = 0$

El ángulo entre dos rectas que no son verticales están determinados por la ecuación

siguiente: $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ (m = pendiente de la recta)

La relación de las pendientes de dos rectas perpendiculares está determinada por:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Practiquemos

- 1) Resolvamos las siguientes desigualdades, utilicemos como apoyo bibliografía específica de cálculo.

a) $\gamma = 25$

c) $\gamma = 6x$

b) $\gamma = \frac{9}{8}$

b) $\gamma = 7x^4$

- 2) Investiguemos el dominio y recorrido de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} + 4$$

- 3) Elaboremos los dominios y recorridos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $h(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- 4) Investiguemos el procedimiento para encontrar los límites de la siguiente ecuación:

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

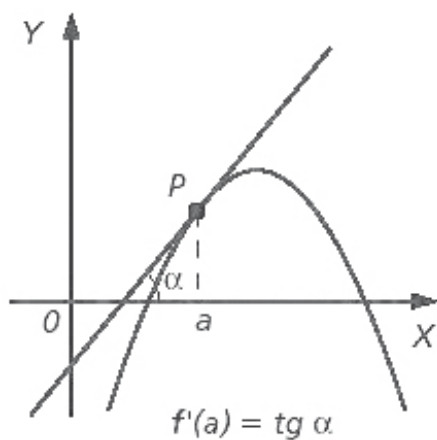
$$f(x) =$$

$$f(x) =$$

$$f(x) =$$

$$f(x) = 2x - 1$$

- 5) Expliquemos la siguiente gráfica de derivación:

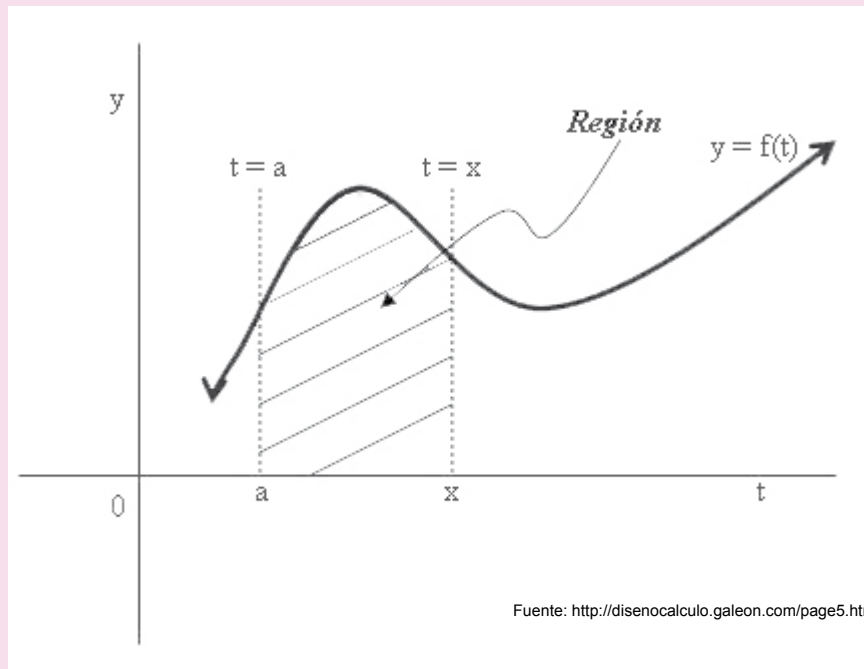


Fuente: hiru.com

Cálculo Integral

Recordemos

La integración es el proceso inverso a la derivación. Dada una función $f(x)$, podemos calcular su derivada. El signo ($\int$) con que se indica la integración. El cálculo integral es una forma de cálculo infinitesimal del área de una función:



Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y siendo x cualquier número en el intervalo mencionado. F es la función definida por:

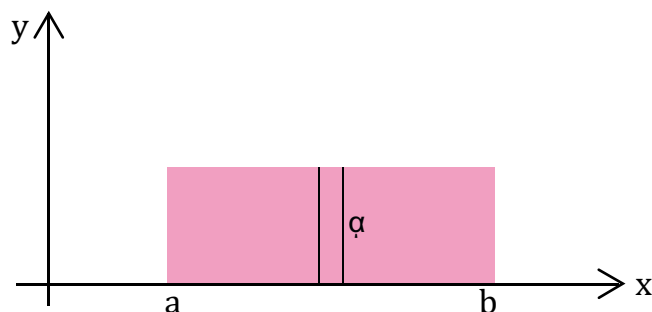
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\text{Entonces: } F'(x) = f(x)$$

El cálculo infinitesimal es una rama de la matemática en el proceso de integración o antiderivación, que se utiliza para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Practiquemos

- 1) La región por debajo de la gráfica es el rectángulo de altura α sobre el intervalo $[a, b]$



La integral proporciona el área del rectángulo:

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$$

Ahora como aplicación **comprobemos** el resultado que se muestra abajo

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

tomemos en cuenta que el máximo es $f(x) = x$ y el mínimo $M_j = x_j$

- 2) Comprobemos que:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}(b - a)$$

tomemos en cuenta que $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y además $[0, 1]$.
Esta función posee un máximo $f(x) = x^2$ y un mínimo de $M_j = x_j^2$

Investiguemos y comprobemos el siguiente teorema:

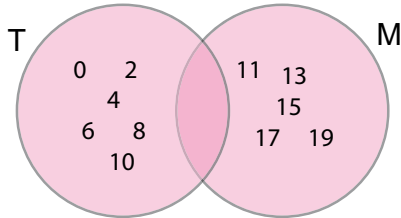
$$\text{Si } a < c < b, \text{ se verifica que } \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Respuestas

Página 7.

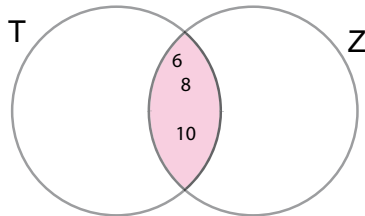
1) a) $T \cup M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19\}$

Forma gráfica



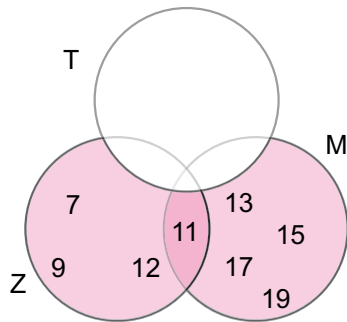
b) $Z \cap T = \{6, 8, 10\}$

Forma gráfica

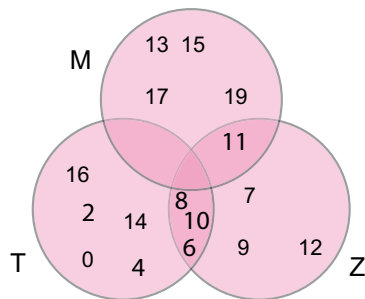


c) $(M \cup Z) - T = \{7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19\}$

Forma gráfica

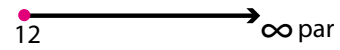


d) $(M \cup Z) \cup T = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19\}$



e) $\{x/x \in \mathbb{N} \text{ par}, x \geq 12\}$

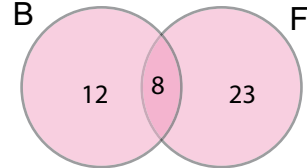
Forma gráfica



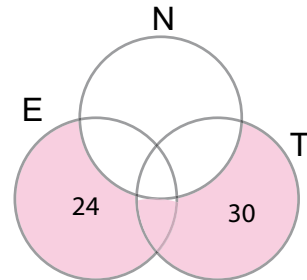
f) $T \Delta Z = \{0, 2, 4, 7, 9\}$

5)

a)



b)



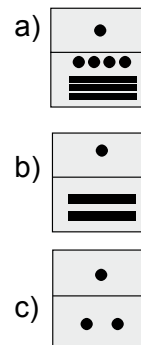
c) Respuesta abierta.

Página 8.

1)

- a) 269
- b) 3,200
- c) 4,003

3)



Página 9.

5)

- a) 21 niños
- b) 75 manzanas

Página 10.

1) $\square_1 = 110$ $\square_2 = 20$ $\square_3 = 42$

Página 11.

3) a) 210

b) 903

c) 310

d) 11

e) 6

f) 10

g) 2

h) 9

i) $\frac{26}{5}$

j) $\frac{3}{2}$

k) $-\frac{32}{55}$

Página 12.

1) a) 8

b) $\frac{7}{24}$

Página 13.

3) c) $\frac{9}{5}$

d) $\frac{10}{7}$

e) $\frac{16\sqrt{5}}{125}$

5) a) 15i

b) 8

c) $12 - 9\sqrt{5}$

6) a) $t = 5.67$ seg
b) $h = 122.5$ m

Página 14.

1) 1,875

2) $\frac{28}{9}$

3) $\frac{13}{192}$

4) $5\frac{4}{25}$

5) 12

Página 15.

6) $\frac{5m^3 - 4m^2n + 2mn^2 - n^3}{m^4 - m^3n + mn^3 - n^4}$

7) $\frac{4-9x}{8x-3}$

8) $\frac{2a^2 - ax - a + x - 1}{2(x-a)}$

9) a) $\frac{x}{mxy} - \frac{y}{mxy} - \frac{m}{mxy}$

b) $\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{y^2}{3x}$

10) a) $\frac{11}{18}$

b) $\frac{15,301}{30}$

Página 17.

3) a) 6, 2; 12,4

b) 10,2; 15,3

c) 3, 6; 4, 8

d) 3, 12; 5, 20

5) a) $\frac{15}{18}$

b) $\frac{300}{250}$

c) $\frac{200}{550}$

Página 18.

- 1) a) 14.4
b) 45
c) 1260
d) 0.12
e) 2.16

Página 19.

- 3) a) 192.59
b) 89.28
c) 33.33
d) 16.67
e) 30.19
f) 544.28

- 5) a) 160 %
b) 200 m²

Página 20.

- c) c.1 60 %
c.2 20 %
c.3 comida Q 1,800.00;
transporte Q 150.00
medicina Q 300.00;
útiles escolares Q 150.00;
otros servicios Q 600.00

- d) d.1 limpieza 38%;
mantenimiento de agua potable 20%
prevención para desastres 15%;
construcción de túmulos 12%
mantenimiento de camino 10%

d.2 En cada inversión se gasta de la siguiente manera:

- limpieza Q 13,300.00;
- agua potable Q 7,000.00;
- prevención para desastres Q 5,250.00;

- construcción de túmulos Q 4,200.00;
- mantenimiento de camino Q 3,500.00
- otros servicios Q 1,750.00

d.3 Limpieza

d.4 Otros servicios

e) Equivale a 9.07% del precio.

f) Se pagará Q 894.51

Página 21.

7) Pablo pagó Q 300,000.00

9) Tasa de interés de 200%

Página 25.

- 3) a) Sí
b) Sí o no
c) No
d) No

Página 26.

- 1) a) 8 cm²
b) 25 m²
c) 54 cm²

Página 27.

- d) 28 m²
e) 35 cm²
f) 18 m²
g) 20 cm²
h) 56 m²
i) 18 m²

2)

- a) 461.58 cm²
b) 226.08 cm²
c) 175.84 cm²

3)

230 m²

Página 28.

4) 580 m^2

5) 168 m^2

6) $1,522.5 \text{ m}^2$

Página 29.

7) $3,346 \text{ m}^2$

Página 30.

1)

- a) 36 cm^2
- b) $1,077.02 \text{ cm}^3$
- c) $3,375 \text{ cm}^3$
- d) 9.81 m^3
- e) 13.20 m^3
- f) 1.62 m^3
- g) 256 cm^3
- h) 180 m^3
- i) $33,493.33 \text{ cm}^3$

2) 781.25 m^2

Página 31.

3) 5.72 m^3

4) $(\pi R^2 h) - (\pi r^2 h) = 7.51 \text{ m}^3$

5) 0.04 m^3

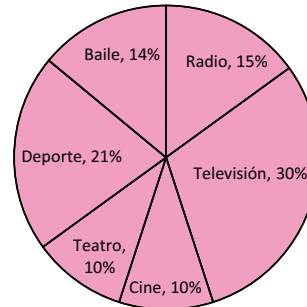
6) 125 cajas

7) 1,600 azulejos

Página 33.

3)

Favorito	No. de personas	Porcentaje
Radio	90	15%
Televisión	180	30%
Cine	60	10%
Teatro	60	10%
Deporte	126	21%
Baile	84	14%



Página 34.

5)

- a) Familia García
- b) 2001
- c) En los años 1997 al 2000;
del 2004 al 2006
- d) 2002 y 2003
- e) En el 2006
- f) Familia García: 39.75 quintales
Familia Rodríguez: 38 quintales

Página 35.

7)

$X = 10.9 \text{ años}$

9)

- a) $Md = 70.42$
- b) $Md = 135.35$

Página 36.

11)

$Mo = 25^\circ\text{C y } 23^\circ\text{C}$

Página 37.

15) $\frac{1}{60}$

17) $\frac{1}{6}$

Página 40.

- 1) a) V
b) F
c) V
d) F
e) F
f) V
- 5) a) tautología
b) ninguna
c) ninguna
d) tautología
e) tautología

Página 41.

- 7) 1ro. ciclista 3
2do. ciclista 4
3ro. ciclista 2
4to. ciclista 1
5to. ciclista 5

- 9) a)

Página 43.

- 3) a) $1\frac{5}{27}$
b) 768
c) 34
d) -17
e) 39

- 5) $V = 1,538.6 \text{ m}^3$

Página 45.

- 3) a) $(x+4)(x+1)$
b) $(a+4)(a-2)$
c) $(m-5)(m+4)$
d) $(h-4)(h-2)$
e) $(y+10)(y-3)$
f) $(n-7)(n+3)$

- g) $(x-6)(x-4)$
h) $(x-12)(x-8)$
i) $(a-5)(a+2)$
j) $(a+6)(a-4)$

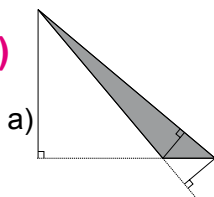
Página 47.

- 1) a) $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$
b) $x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$
c) $x_1 = -3, x_2 = \frac{5}{3}$
d) $x_1 = 5, x_2 = -\frac{18}{5}$
e) $x_1 = -\frac{7}{9}, x_2 = -\frac{1}{3}$
- 2) a) $x_1 = -2, x_2 = -3$
b) $x_1 = -6, x_2 = 4$
c) $x_1 = 2, x_2 = 1$
d) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$
e) $x_1 = -\frac{5}{6}, x_2 = \frac{3}{5}$
- 3) a) 15
b) 4 segundos
c) Ancho: 15 metros. Largo: 22 metros.
d) Base: 14 centímetros.
Altura: 10 centímetros
e) Base: 20 cm

Página 51.

- 1) a) 15 cm
b) 7.2 cm

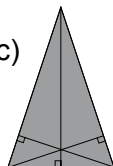
2)



b)



c)



- 3) a) 36 m²
b) 48 cm²
c) 20 cm²

- 4) 30 cm²

Página 52.

- 5) a) Sí

b) No, porque la suma de los 3 ángulos internos es igual a 180°.

c) Sí

- 7) Q 7,920.00

- 8) Q 43,750.00

Página 53.

- 9) $\angle ABC = 71^\circ$

$\angle DCB = 163^\circ$

$\angle DCE = 18^\circ$

$\angle BAC = 90^\circ$

Página 57.

1)

- a) $\angle DOE$ y $\angle EOF$
 $\angle GOA$ y $\angle AOC$
 $\angle GOB$ y $\angle BOC$

- b) $\angle AOB$ y $\angle BOF$
 $\angle AOC$ y $\angle COF$
 $\angle AOD$ y $\angle DOF$
 $\angle AOE$ y $\angle EOF$

$\angle GOA$ y $\angle AOE$
 $\angle GOB$ y $\angle BOE$
 $\angle GOC$ y $\angle COE$
 $\angle GOD$ y $\angle DOE$

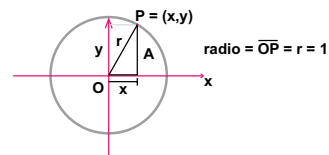
- 3) $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$
 $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$
 $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

Página 58.

- 5) $A = 36^\circ$
 $\sin 36^\circ = 0.59$
 $\cos 36^\circ = 0.81$
 $\tan 36^\circ = 0.73$
 $\csc 36^\circ = 1.70$
 $\sec 36^\circ = 1.23$
 $\cot 36^\circ = 1.38$

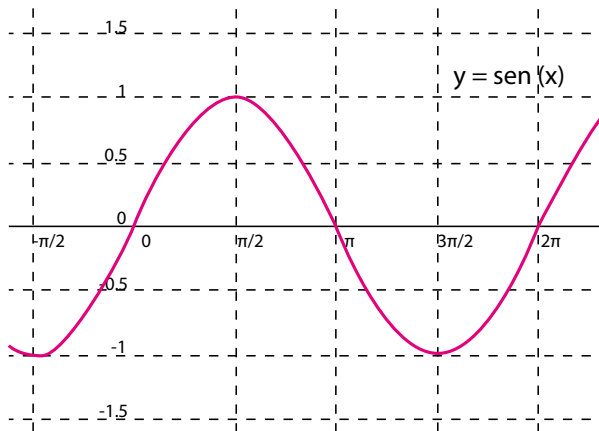
- $A = 25^\circ$
 $\sin 25^\circ = 0.42$
 $\cos 25^\circ = 0.91$
 $\tan 25^\circ = 0.47$
 $\csc 25^\circ = 2.37$
 $\sec 25^\circ = 1.10$
 $\cot 36^\circ = 2.14$

- 7) a) $\sin 120^\circ = 0.87$
b) $\sec 200^\circ = -1.06$
c) $\tan 190^\circ = 0.18$
d) $\cot 160^\circ = -2.75$
e) $\csc 270^\circ = -1$
f) $\sec 45^\circ = 1.41$



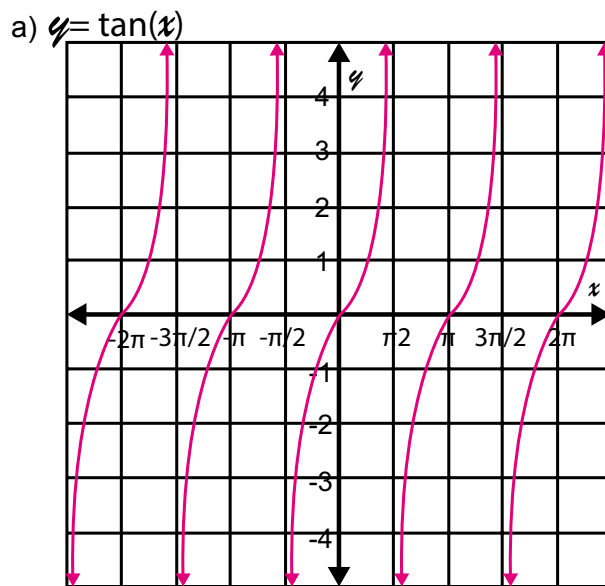
- 9) a) $\sin 74^\circ \equiv 0.96$
 b) $\tan 65^\circ \equiv 2.14$
 c) $\sec 70^\circ \equiv 2.92$
 d) $\cos 80^\circ 30' 10'' \equiv 0.17$
 e) $-\sin 50^\circ \equiv -0.77$
 f) $\cot 50^\circ \equiv 0.84$

Página 60.



- a) $x = 0, \pi, 2\pi$
 b) $-1 \leq \text{Sen } x \leq 1$

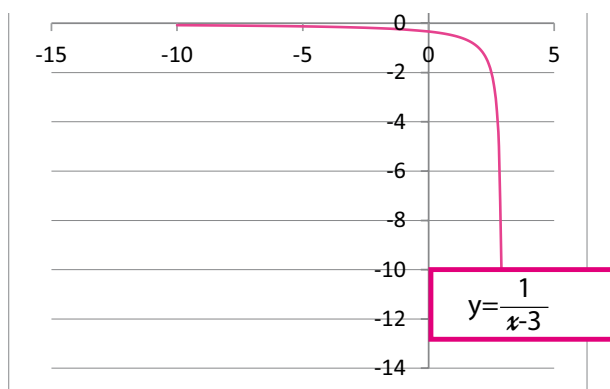
Página 62.



- b) $x = 0, \pi, 2\pi$

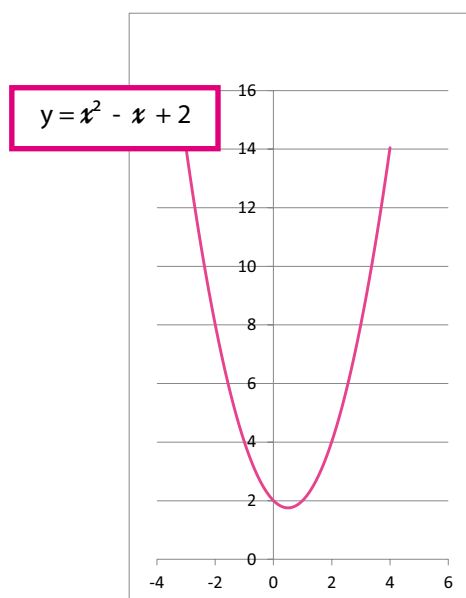
1)

x	y
0	-0.33333333
1	-0.5
2	-1



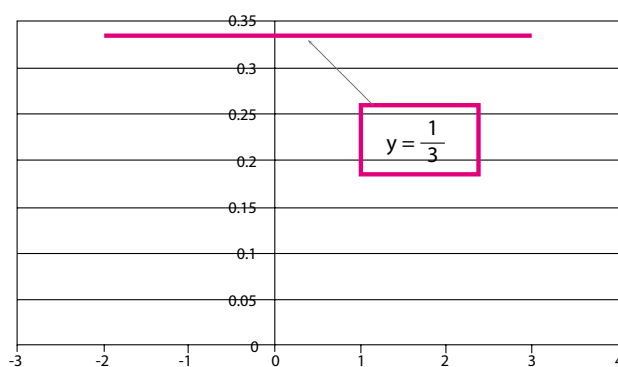
3)

x	y
-2	8
-1	4
0	2
1	2
2	4
3	8



5)

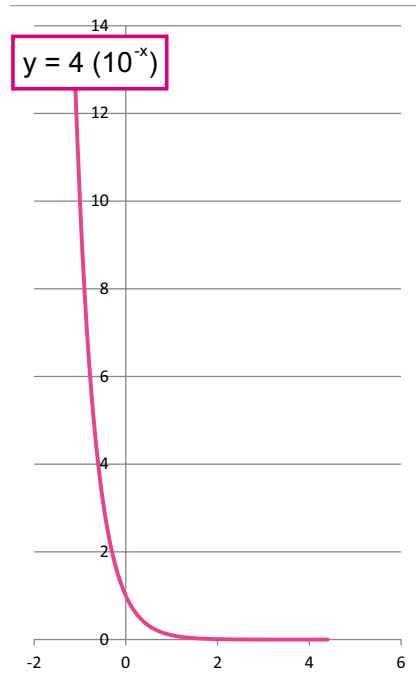
x	y
-2	0.333333
-1	0.333333
0	0.333333
1	0.333333
2	0.333333
3	0.333333



Página 66.

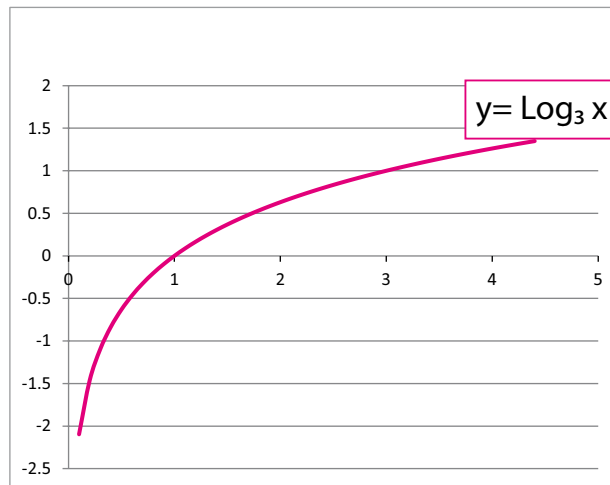
7)

x	y
-2	400
-1	40
0	4
1	.4
2	.04



9)

x	y
0.11111111	-2
0.33333333	-1
1	0
2	1
9	2



Página 68.

1)

a) $B = 95^\circ$ $c = 4.61 \text{ m}$ $a = 6.15 \text{ m}$
b) $A = 140^\circ$ $b = 8.05 \text{ m}$ $c = 13.15 \text{ m}$

3)

a) $c = 3.09 \text{ cm}$ $B = 39^\circ$ $A = 118^\circ$
b) $a = 4.83 \text{ m}$ $B = 117^\circ$ $C = 42^\circ$

1) b) $a = 2$

c) $\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -2 \\ -1 & \frac{5}{3} \end{vmatrix}$

Notas

[illegible]

Anexo. Vinculación con el CNB

Competencias	Indicadores de Logros	Contenidos
1. Produce patrones aritméticos, algebraicos y geométricos aplicando propiedades, relaciones, figuras geométricas, símbolos y señales de fenómenos naturales, sociales y culturales.	1.2. Aplica la factorización de polinomios al operar y simplificar fracciones complejas.	Potenciación y radicación de polinomios.
		Cálculo de operaciones entre fracciones algebraicas.
		Simplificación de fracciones complejas.
	1.3. Distingue las propiedades y las relaciones de las operaciones básicas aritméticas.	1.3.1. Identificación de las propiedades de las operaciones básicas aritméticas.
		1.3.2. Expresión de las relaciones aritméticas utilizando los signos, símbolos, gráficos, algoritmos y términos matemáticos.
	1.5. Demuestra patrones haciendo uso del calendario Maya.	1.5.1. Determinación de patrones en el calendario maya: nombres y glifos de los días.
		1.5.2. Explicación del cholq'ij, el ab', el tun (Calendario sagrado de 260 días, año solar de 365 días y el ciclo de 360 días) y sus implicaciones en la vida del ser humano y en los elementos de la naturaleza.
2. Resuelve situaciones problema de carácter formal que demandan el dominio del pensamiento lógico matemático y las operaciones matemáticas de aritmética y álgebra en los conjuntos numéricos reales y complejos.	2.1. Representa información por medio de proposiciones compuestas y tablas de verdad.	2.1.1. Utilización de conectivos lógicos.
		2.1.2. Elaboración de tablas de verdad.
	2.3. Aplica los números reales y sus respectivas operaciones en la resolución de situaciones problema.	2.3.1. Ejemplificación de números reales y de las propiedades de sus operaciones: adición, multiplicación, división, sustracción, potenciación, radicación y logaritmación.
		2.4.1. Diferenciación de solución, representación gráfica e interpretación entre ecuaciones y desigualdades.
	2.4. Utiliza ecuaciones y desigualdades: lineales, cuadráticas y con valor absoluto, para resolver situaciones problema de su contexto.	2.4.2. Resolución de problemas en donde se apliquen ecuaciones y desigualdades, lineales, cuadráticas y con valor absoluto.
		2.5.1. Conceptualización de números complejos.
	2.5. Realiza operaciones básicas entre números complejos.	2.5.2. Simplificación y operaciones básicas entre números complejos.

Competencias	Indicadores de Logros	Contenidos
3. Aplica conocimientos sobre funciones, matrices, geometría y vectores, en situaciones que promueven el mejoramiento y transformación del medio natural, social y cultural de su contexto.	3.1. Utiliza funciones para representar hechos reales.	3.1.1. Definición de función.
		3.1.2. Conceptualización del dominio y el rango de una función.
		3.1.3. Ejemplificación de las diferentes funciones: logarítmicas, trigonométrica y exponencial.
	3.7. Utiliza métodos para resolver problemas y operaciones entre vectores y matrices.	3.7.1. Cálculo de las operaciones básicas entre matrices: suma, resta, multiplicación entre un escalar y una matriz, producto matricial.
		3.7.2. Aplicación de las operaciones entre vectores y matrices para resolver problemas relacionados con otras áreas de la ciencia, otras disciplinas o actividades del contexto.
5. Emplea las teorías de geometría y trigonometría para interpretar diferente información y elaborar informes sobre situaciones reales.	5.1. Aplica teoremas y conocimientos de geometría plana en la construcción de cuerpos geométricos.	5.1.1. Conceptualización de teoremas sobre geometría plana (Pitágoras, Thales y Euclides).
		5.1.2. Aplicación de conceptos: semejanza, congruencia, simetría, tipos de ángulos, bisectriz, clasificación de polígonos.
		5.1.3. Cálculo de perímetro, área y volumen de figuras planas.
		5.1.4. Cálculo de volumen en cuerpos geométricos.
		5.1.5. Construcción de cuerpos geométricos, cálculo de perímetro y área total.
	5.2. Aplica teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente para resolver problemas con triángulos rectángulos.	5.2.1. Demostración del teorema de Pitágoras.
		5.2.2. Ejemplificación de razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.
		5.2.3. Resolución de situaciones reales aplicando el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

Quinto Grado Bachillerato

Competencias	Indicadores de Logros	Contenidos
1. Aplica teoremas trigonométricos y ley de senos y cosenos en la interpretación de funciones trigonométricas circulares.	1.1. Demuestra las relaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas circulares.	1.1.1. Descripción de ángulos y funciones trigonométricas.
	1.2. Aplica las leyes de senos y cosenos en situaciones reales.	1.1.2. Representación gráfica de funciones trigonométricas.
		1.2.1. Aplicación de las operaciones entre ángulos.
		1.2.2. Demostración de las leyes de senos y cosenos.
2. Emplea funciones exponenciales y logarítmicas en representaciones gráficas.	2.1. Ejemplifica funciones exponenciales y logarítmicas en diversos contextos.	1.2.3. Aplicación de las leyes de senos y cosenos en situaciones reales.
		2.1.1. Identificación de las funciones exponenciales y logarítmicas.
	2.2. Representa gráficamente la función exponencial y la función inversa.	2.1.2. Ejemplificación de la relación existente entre las distintas funciones.
		2.2.1. Descripción de la función exponencial (varias bases), representación gráfica.
		2.2.2. Construcción de gráficas.
	2.3. Aplica funciones exponenciales y logarítmicas en la resolución de problemas.	2.2.3. Explicación de la función inversa y su representación gráfica.
		2.3.1. Aplicación de la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.
4. Aplica el álgebra matricial para la solución de problemas de la vida real.	4.1. Identifica los diferentes tipos de álgebra matricial en diversos contextos.	4.1.1. Definición de álgebra matricial.
		4.1.2. Ejemplificación de procedimientos con álgebra matricial en diferentes situaciones.
		4.1.2. Utilidad de las matrices en diversos contextos.
	4.2. Aplica las matrices "n x m" y los vectores de R_n para la interpretación de situaciones reales.	4.2.1. Aplicación del concepto de matriz cuadrada a matriz (n x m).
		4.2.2. Cálculo de la suma como resultado de la operación adición de matrices.
		4.2.3. Aplicación de la multiplicación de matrices y de un escalar por una matriz.

Competencias	Indicadores de Logros	Contenidos
		4.2.4. Interpretación de situaciones en las que se puede utilizar matrices.
5. Utiliza el cálculo integral para determinar velocidades instantáneas, área bajo la curva y volumen de cuerpos sólidos.	5.1. Identificación de las diferentes clases de cálculo integral.	5.1.1. Descripción de las diferentes clases de cálculo integral.

Referencias bibliográficas

- Baldor, A. (2012) ARITMETICA, Cuarta impresión. México.
- Baldor, A. (2012) ALGEBRA, Quinta reimpression. México.
- Baldor, A. (2013) GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA, Cuarta reimpression. México.
- Larson, R., Hostetler, R., Neptune, C. (2000). Álgebra Intermedia, Segunda edición. Mc Graw Hill.
- Ministerio de Educación (2009). Serie GUATEMÁTICA, Segunda Edición, Guatemala.
- Medina, D., Solares, C., Pazzetty, D., Roldán, J. (2001). Matemática 7, Editorial Santillana, Panamá.
- Pérez, H., Solares, C., Aldana, E., Pazzetty, D. (2001). Matemática 7, Editorial Santillana, Colombia.
- Real Academia Española. Versión digital 2014.
- Salas, S., Hille E. 1976. CALCULUS, de una y varias variables con geometría analítica. Editorial REVERTE, S.A. España.
- Spitzbart, A., Bardell, Ross. (1983). ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA PLANA. Séptima impresión. México.



GOBIERNO DE LA REPÚBLICA DE
GUATEMALA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN